CAROLI RENALDINII

SERENISSIMI COSMI TERTII
MAGNI ETRVRIÆ DVCIS
Philosophi, ac Mathematici,

*ET IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI
Primæ Sedis.*

GEOMETRA PROMOTVS

EIDEM SERENISS. MAGNO DVCI
D.

PATAVII, MDCLXX.

Typis Petri Mariæ Frambotti Bibliopolæ.
SVPERIORVM PERMISSV.

CAROLI RENARDINII
IN SVVM
PROMOTVM GEOMETRAM
Præfatio.

TRactationem illam ad extremum aggredimur, in qua de Vnitate, quatenus in Geometria quidem uſum habere poteſt, nobis eſt diſſerendum. Hanc autem prouinciam nos aliquando ſuſcepturos eſſe, non ſemel polliciti ſumus. Res magni momenti eſt; ita nimirum vt facilè mihi ſuaſerim, Geometram aliunde tam magnas ſuppetias ad veritatem indagandam deſumere non poſſe; præſertim in concinnandis demonſtrationibus, difficilimarum Effectionum, quas Analyſta didicit ab Arte ſua.

Proponitur agendum de vſu Vnitatis in rebus Geometricis.
Magna iſtius vſus vtilitas.

At verò duo videbantur eſſe, de quibus erat operæ pretium Artificem eſſe magnopere ſollicitum. Vnum Geometrica Effectio: Alterum eiuſdem Demonſtratio; Illud quidem; nam tametſi ritè fuerit Analyſis ordinata, & inde Poriſma deductum; niſi tamen præſto ſit modus, quo quidem ad oblati Problematis reſolutionem conducente, perficiatur Effectio, nihil actum videtur; cùm potiùs analyticum laborem illum pertuliſſe, ſit oleum, ac operam perdidiſſe. Erat propterea, cur quamplurimas Lineas qualiſcunque nobis illas dictauerit ſolertia, perquireremus; vt ijs videlicet opitulantibus, datum nobis foret in arenam deſcendere, ne Problematum illorum, quorum difficultas Veterum torſit ingenia, nobis negotij quicquam faceſſeret; ſed potiùs ea meditatione perſequi, & reſoluenda ſuſcipere, nullius fere laboris foret; cùm alioquin ijs olim ſatisfacere, nemini Mortalium licere, niſi conſulto quidem Oraculo, crederetur.

Duo ſunt, de quibus oportet Analyſtam eſſe ſollicitum.
Effectio Geometrica, euiſque demonſtratio.

Alterum, quod quam maximè, videbatur in votis, quædam erat diſſerendi ratio, qua non fortuitò Effectionem ipſam, dictante Poriſmate, demonſtraremus, non Arabum via ſalebroſa, ac ardua, ſed Regia quidem Euclidis incedentes; quod, etſi citra puluerem fieri poſſe cuilibet fateri neceſſè ſit, cùm ſcilicet in ipſa peragenda reſolutione, nullus ad ſolida, & multò minus ad imaginarias quantitates ſit áſcenſus; quam ſæpiſsimè tamen exigui laboris non eſt, comparatam iam Effectionem Euclideo more demonſtrare. Nos autem neceſsitate quadem adacti, noſtras eſſe partes credidimus, hunc ſupplere Artis defectum; vt hac nimirum ſic locupletata, Veterum Analyſtarum neminem poſthac nos admirari debeamus:

Olim ijs credebatur impoſſibile Problematibus ſatisfacere, quæ Auctor reſoluenda ſuſcipit,
Quando non ſit aſcenſus ſupra plana, nullius laboris eſt Problemata reſoluere.

 quod

quod si fortassis perspectum ijs fuisset, non tàm auidè sua, de industria, perquisitionis vestigia, occultaßent; quasi Posteris inuidentes hanc Artem indagatricem, suis verbis ab ijs extorquere vellent assensum. Antiquis tamen habendæ sunt gratiæ non vulgares, quòd eousque nobis artificiosam illam indagandi rationem suppreßerint, vt coegerint nos ad nouam hanc proprio Marte parandam: de qua non iniuria præsens ætas gloriari poßit.

Huius tractationis argumentum.

Hæc autem vniuersa, quam præ manibus habemus, Tractatio docet, qua ratione per Analogismum omnia Potestatum genera, facto initio à Quadrato, Vnitatis præsidio, in simplicißimas longitudines resoluantur. Hunc itaque in modum, nedum Potestates ipsæ, verum etiam & ijs homogenea tractantur, non secus ac si longitudines forent: vnde demonstratio omnis per longitudines ipsas procedit; ac proinde quamuis Analysis ad solida, quinimmò ad imaginarias quantitates ascenderit, & per earum æqualitatem proceßerit, adhuc tamen nostra hac, quam subijcimus, Methodo, licet eiusdem Analyseos vestigia repetere, ad demonstrationes contexendas, tàm solidis, quàm altioris ordinis quantitatibus neglectis, vt non minus Geometrica Effectio, quàm eiusdem legitima demonstratio sit obuia. Opus quidem hactenus inacceßum, magnopere tamen exoptatum; non enim Artifici parùm erat dedecori, hinc non demonstrationem, sed Effectionem ipsam attendere. Quantum porrò Veteres Analystæ peccaßent in Arte, non erit operosum intelligere ex ijs, quæ proprio Marte, haud Musis inuitis, adinuenimus.

Auctoris Methodus magnam habet vtilitatem adiunctam.

Primùm igitur de Geometricis Effectionibus agendum: postmodum autem de contexendis demonstrationibus Vnitatis præsidio disputandum: deinde hæc eadem exemplis illustranda sunt; Tandem Appendicem de Maximis, & Minimis subijciemus, in qua vniuersalem, generalemque demonstrandi formam, perquisitionisque modum afferemus; Quamuis enim Veteres, non sine magno virtutis splendore, nominisque celebritate, hac de re Lucubrationes ediderint, tamen nullà id lege factum ab ipsis iure dixeris; quicquid enim sunt, de Maximis, & Minimis tractantes, meditati, casu potiùs, quàm Artificiosa differendi ratione præstitisse, uidentur. Recentiores contra ad præcepta industriosè admodum omnia redigentes, Artem resolutricem, non sine magno Reipublicæ Litterariæ commodo, ac utilitate auxerunt. Hæc igitur huius Tractationis summa esto. Supereſt, ut hic Lectorem certiorem faciamus, nobis in animo quidem eße, hac methodo beneficio Vnitatis absoluta, generalem quandam resoluendi, componendique normam tradere, atque docere; non quasi innumera Problemata, alijs Methodis, resolui non posse existimemus (quod non fuit prorsus abs re animaduertisse) sed quia eo saltem nomine hæc ceteris præferenda uidetur, quòd ad infinita, eaque difficilima resoluenda Problemata conducit, quibus, vnica quauis reliquarum opitulatione obuiam ire non licet.

Tractandorum ordo.

Apendix de Maximis, & Minimis ad calcem huius Tractatus differtur.

Recentiorum Methodus pro Maximis, & Minimis indagandis maximè commendabilis.

Huius Methodi excellentia, atque præstantia.

DE GEOMETRICIS EFFECTIONIBVS.

Effectio Naturæ ordine demonstrationem præcedit; quamobrem primùm hic de ipsa differendum.

Est autem Effectio in Analyticis operatio à Porismate præscripta; cùm enim in omni Problemate sit aliquid nobis operandum, & quid operandum sit Porisma præscribat; hoc ipsum est quod effectionem appellant. Cùm autem dicimus, in quouis Problemate aliquid nobis operandum esse, ac illud à Porismate præscribi, sano id modo intelligendum, vt suo loco monuimus; nam re vera nihil est, quod operamur, sed per hunc loquendi modum significamus ortum, seu genesin, vel alicuius diuisionis, additionis, vel alicuius figuræ, vel alicuins proportionis &c. nihil est, inquam, quod operamur; haud enim concessum est nobis lineam ducere, figuras describere &c. nisi intellectu, ac imaginatione; At si id, quod nobis imaginari licet, aliquid à nobis operabile dicendum erit, tunc dicemur aliquid operari, cum aliquid, quod in re non est, imaginatione effingimus. Num verò id ritè sit dictum, penes te iudicium esto. Superiùs enim aduertimus, nec Arithmeticam, nec Geometriam &c. esse de re operabili, si res operabilis accipiatur iuxtà communem vsum loquendi; quod si sumatur pro omni eo, quod nos operari valeamus, etsi tantummodò actibus intellectus, sic essent de re operabili; vnde lineam ducere, circulum describere, cæteraque perficere, quæ in huiusmodi Disciplinis locum habent, hoc sensu erit operari; ac ob id cognitio, quæ de his est, si circa hæc ipsa versetur operabili modo, præscribendo scilicet præcepta, ac regulas, quibus nos actibus mentis lineam imaginatione descriptam, hoc, vel illo modo diuidere valeamus, & alia consimilia conficere poßimus, practica dicetur; at quæ in sola veritatis indagatione sistit, nec nobis inseruire potest ad hoc, vel illud, nec etiam actibus mentis operandum, in magnitudinibus, numeris &c. cõtẽplatiua nũcupabitur. Effectio igitur, de qua loquimur, eo sensu est vsurpanda, quo in his, & consimilibus aliquid à nobis effici dici potest.

Effectio quid sit in Analyticis.

Quo sensu Mathematica de re operabili dici possint, & qua ratione practica.

Ad hanc igitur Effectionem quod attinet; reuocandum est in memoriam, quod suo loco non semel à nobis inculcatum fuit, nimirum omnia linearum genera adhiberi posse; cùm omninò à veritate alienum arbitraremur, Geometram tantummodò circulo, lineaque recta vti posse; id enim intollerabile duximus; quamobrem liberum existimamus Geometræ quodcunque lineæ genus assumere, cuius natura ad oblati Problematis effectionem conducit.

Omne linearum genus in Effectionibus adhiberi potest.

Non solum igitur lineam circularum, cum linea recta, sed omnes sectiones conicas, nimirùm lineas, Parabolicam, Hyperbolicam, & Ellipticam; præterea Concoideam, Cycloideam &c. de quibus intitio multa diximus, adhiberi posse censemus. His autem adijcimus illas, quas Mediceas dicebamus. Solertia igitur Artificis erit oblati Problematis naturam introspicere, ac diligenter attendere, quod nam sit lineæ genus, ad optatam Effectionem conducens; nam quæcunque illa extiterit, ea est adhibenda; in quo tantùm illud est obseruandum, vt si plures lineæ proposito satisfaciant, ea seligatur, quæ minus composita est; vnde si Problemati satisfacere licet præsidio lineæ circularis cum linea recta, cauendum à lineis magis compositis, vt à parabolica, hyperbolica, &c.

In quo potissimum; Artificis solertia posita sit.

Sed vt in arenam descendamus; primum occurrit considerandus modus, quo alij Problemata, quæ solida dicuntur, construere consueuerunt; omnia enim problemata, quorum Effectio lineam magis compositam, quam circularem requirit, solida nuncuparunt; Sed nos antiquâ retentâ partitione Problematum, in Plana, Solida, & Linearia, procedimus, contendentes, ijs Problematibus, quorum constructio, siue Effectio, neque per circulum, neque per conicas sectiones haberi potest, per alias lineas, tùm antiquas, tùm à nobis excogitatas, quæ tamen, vtpote communißimæ, omnibus Problematibus inseruiunt, plenè, ac planè satisfacere.

Primò considerandus modus, quo problemata solida construxerunt.

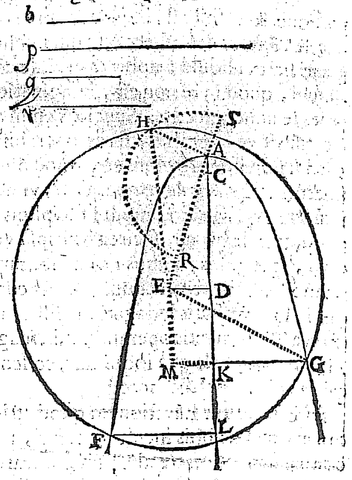
Erat autem subsequens modus, quo Cartesius vtebatur, ad construenda Problemata solida.

Problemata solida ad æquationes trium, vel quatuor dimensionum reuocata Cartesius, ad eum qui sequitur modum, construxit.

CONicæ sectiones præcipuè verò ea, quæ Parabole dicitur, suppeditat nobis viam ad construenda Problemata solida, quæ ad æquationem trium, vel quatuor dimensionum redacta fuere.

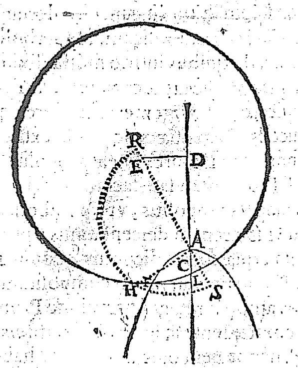
Id autem, vt assequamur, iuuabit secundum æquationis terminum de medio tollere, si nimirum adsit obseruatis præceptis iam supra traditis; atque adeò oportebit æquationem ad hanc formam redigere $u^3 = * \, b p u ; b^2 q$, quando nimirum incognita quantitas tres tantummodò dimensiones habeat.

Vel ad hanc reducetur $u^4 = * \, b p u^2 ; b^2 q u ; b^3 r$; si videlicet ignorata quantitas quatuor dimensiones habuerit; cumque b, sumi posit vnitatis loco, proindè prior illa reducetur ad hanc $u^3 = * \, p u , q$; Secunda verò verò ad istam $u^4 = * \, p u^2 , q u , r$.

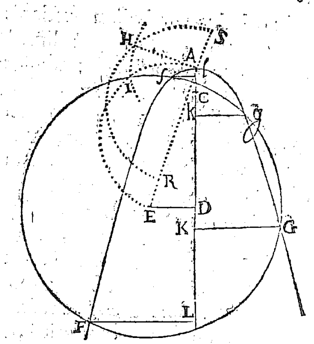


Supponamus Parabolen F A G, iam esse descriptam; (utimur demonstratione Cartesij, rectè concludente) eius autem axis sit A C D K L. Sit autem recta iuxta quam possunt ordinatim applicatæ, siue latus rectum B (quid autem sit latus rectum Paraboles patet ex Apollonio); illud verò statuendum est b, vel 1; sit porrò dimidium ipsius A C. Punctum autem C sit intra Parabolen, cuius vertex sit A. Oportet autem facere $CD = \frac{1}{2} p$, quæ sumenda est in recta A C, continuata versus C, quando nimirùm in æquatione habeatur $+ p$, versus tamen alteram partem, si adsit $- p$. E puncto autem D, vel ex puncto C, cum non habetur quantitas p, erigatur à axem perpendicularis D E, æqualis $\frac{1}{2} q$; deinde centro E, describatur circulus F G, cuius semidiameter sit A E, non intercedente quantitate r. Quòd si hæc intercesserit vtrinque (si tamen signo + afficiatur) producatur vlterius, & in hac linea A E, hoc pacto vtrinque producta sumatur ex vna parte $AR = r$, ex altera verò A S, quæ sit æqualis lateri recto Paraboles; quod quidem supponimus esse 1. Describatur verò circulus, cuius diameter R S, & erigatur A H, perpendicularis ad A E, occurrens huic circulo in H, puncto per quod circulus alter F H G, transire debet. At verò si quantitas r, afficeretur signo −; oporteret in alio circulo, cuius diameter A E; oporteret, inquam, inscribere A I, æqualem inuentæ A H, & per punctum inuentum I, primus ille circulus F I G, transire debet, primus, inquam, circulus quæsitus.

Vide primam figuram.



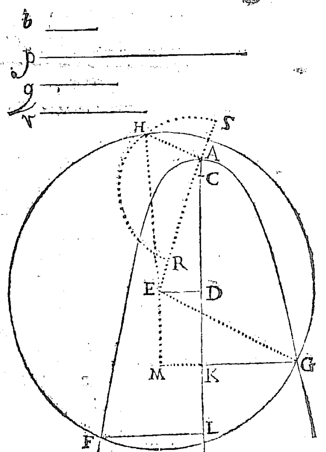
Oportet autem animaduertere ab hoc circulo secari, vel tangi posse Parabolen in vno, vel duobus, tribus, vel quatuor punctis, à quibus nimirùm, si ad axem demittantur lineæ perpendiculares, habebuntur omnes æquationis



radices tàm veræ, quàm falsæ. Itaque si quantitas, quæ ponebatur q, affecta sit signo +, radices veræ erunt illæ ex his perpendicularibus, quæ nimirum ex eadem parte Paraboles, qua est E, circuli centrum, reperientur, quemadmodum F L, reliquæ autem, vt G K, falsæ erunt. Contra verò si quantitas q, prædicta affecta fuerit signo −, illæ quidem veræ erunt, quæ ex altera sunt parte, falsæ autem, quæ ex parte illa, vbi centrum E, reperitur. Quod si eueniat vt circulus hic, neque secet, neque tangat parabolen in aliquo puncto, id planè argumento erit æquationem nullam radicem admittere, neque veram, neque falsam, sed tantùm imaginarias.

Supponamus autem G K, inuentam esse, radicem quæsitam u; A K, erit u^2; siquidem G K in Parabola, medio loco proportionalis est inter A K, & latus rectum; cumque latus rectum sit 1, sequitur A K, esse u^2. Si verò ab A K, auferatur A C, quæ est $\frac{1}{2}$, cum sit dimidium lateris recti, vt, & C D, quæ est $\frac{1}{2} p$, remanebit D K, siue E M; $u^2 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$, huius autem quadratum est $u^4 - p u^2 - u^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$; erat autem D E, siue K M; $\frac{1}{2} q$; Quamobrem tota G M, erit $u + \frac{1}{2} q$; cuius quadratum est $u^2 + q u + \frac{1}{4} q^2$ duobus autem additis hisce quadratis, & fiet $u^4 - p u^2 + q u + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$, pro quadrato ipsius rectæ G E, quæ nimirùm est basis trianguli rectanguli E M G.

$$
\begin{array}{l}
u^2 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} \\
u^2 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} \\
\hline
- \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} p + \frac{1}{4} \\
- \frac{1}{2} p u^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{4} p \\
u^4 - \frac{1}{2} p u^2 - \frac{1}{2} u^2 \\
\hline
u^4 - p u^2 - u^2 - \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} \\
\\
u^4 - p u^2 - u^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} \\
u^2 + q u + \frac{1}{4} q^2 \\
\hline
u^4 - 4 u + q u + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}
\end{array}
$$

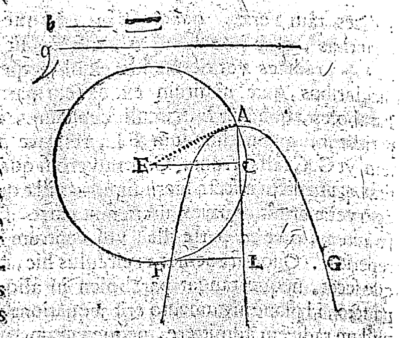


Cum autem hæc eadem linea GE, sit circuli F G, semidiameter, erit etiam alijs modis explicabilis. Si igitur E D fuerit $\frac{1}{2} q$, & A D, $\frac{1}{2} p + \frac{1}{2}$, certè E A, erit, ℞$(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4})$ eo quia triangulum illud sit rectangulum, cuius rectus angulus est A D E. Cum autem A H, sit media proportionalis, inter rectam A S, positam æqualem lateri recto, quod esse 1, dicebamus, & rectam A R, quæ est r; proindè A H erit ℞r, quia verò angulus E A H rectus est: quadratum ex E H, siue E G erit, $\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} + r$, erit igitur æquatio huiusmodi

$$\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} + r = u^4 - p u^2 + q u + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4},$$

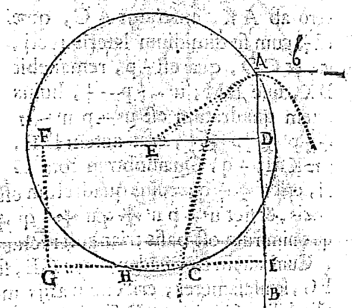
Et per Antithesin in $u^4 = * + p u^2 - q u + r$

Huius igitur æquationis radix erit G K, quæ ponebatur u.



Præsidio huius parabolicæ sectionis inter duas datas rectas lineas haud est difficile duas alias medio loco proportionales adinuenire. Supponamus itaque datas esse rectas b, q, inter quas operæ pretium sit reperire duas rectas medio loco proportionales in proportione continua. Dicamus vnam esse u, erit autem vt b, ad u, ita u, ad $\frac{u^2}{b}$, & vt u, ad $\frac{u^2}{b}$, ita $\frac{u^2}{b}$ ad $\frac{u^3}{b^2}$; quamobrem æquatio fiet huiusmodi $\frac{u^3}{b^2} = q$, nempe $u^3 = * b^2 q$; modo verò describatur Parabole F A G, & ex eius axe sumatur segmentum A C; quod æquale sit dimidio lateris recti eiusdem Paraboles, quod cum diceremus esse 1, prædictum segmentum erit $\frac{1}{2}$. Erigatur ex puncto C perpendicularis C E, quæ æqualis fiat dimidio iam datæ q; & centro E, per A, descripto circulo A F, innotescent F L, L A, mediæ quæsitæ.

Cùm autem Cartesius omiserit demonstrationem, qua scilicet ostendatur, quatuor lineas b, L F, L A, & q, continuè proportionales esse; proinde non erit abs re, id quàm breuiter, perspicuèque demonstrare, sed hæc etiam supra demonstrata sunt.

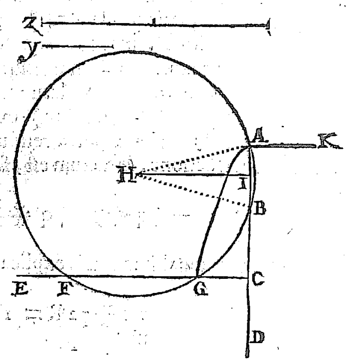


Sit Parabole A C, cuius axis sit A B, vertex autem A, latus rectum sit b, cuius dimidio fiat æquale segmentum A D, ex quo puncto agatur D E, quæ sit dimidia datæ rectæ q, inter quam & b, oporteat reperire duas medias proportionales; Deinde centro E, interuallo verò E A, describatur circulus secans axem A B in K, & sectionem ipsam in C; modò protracta D E, vlterius vsque ad peripheriam circuli, & per punctum C, ducatur recta parallela ipsi D E, quæ sit C H, at verò fiat E F, æqualis ipsi E D, cadat ex puncto F, recta F G, ad rectos angulos cum F D, ac proindè parallela rectæ D B, occurrens lineæ C H, protractæ in G; hæc verò ex alia parte protrahatur occurrens rectæ AB, in I. Dico C I, I A, duas medias esse proportionales inter b, & q. Quoniam enim C I, est semiordinatim applicata, erit rectangulum sub b, & A I, æquale quadrato ex C I, constat ex Apollonio 1. lib. Coni. vt igitur b, ad C I, ita C I, ad I A; at verò G I, æqualis est F D, & F D, æqualis est q, ex constructione, ergo rectangulum comprehensum sub G I, & I C, idem erit quod sub q, & C I; sed rectangulum G I C, siue sub G I, & I C, æquale est quadrato ex I A, ergo rectangulum sub C I, & q, æquabitur quadrato ex I A; quamobrem erit, vt C I, ad I A, ita I A, ad q, itaque quatuor proportionales erunt b, C I, I A, & q.

Quod autem rectangulum G I C, æquale sit quadrato ex I A, demonstratur; quadratum enim ex I A, æquale est [a] rectangulo A I K, plus rectangulo I A K, sed rectangulum
[a] 2. secundi. A I k, æquale est rectangulo H I C, ergo quadratum ex I A, æquabitur rectangulo HIC, plus rectangulo I A k, sed rectangulum I A k, æquale est quadrato ex C I, ob naturam Paraboles; siquidem A K, æquatur b, lateri recto eiusdem, ergo quadratum ex I A, æquale erit rectangulo H I C, plus quadrato ex C I, hoc est ex G H, sed rectangulum HIC, plus quadrato ex G H, æquale est rectangulo G I C, ergo rectangulum G I C, æquale erit quadrato ex A I, rectè igitur dicebamus esse continuè proportionales b, C I, I A, & q; Quod ostendere oportebat.

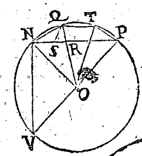
Hinc liquet illud idem, quod lib. 2. de Resolutione, & Compositione ostendimus &c.

Hic enim nil aliud colligitur, quàm quod superiori demonstratione consecuti sumus, licet in ipsa demonstrandi forma discrimen aliquod tyroni videri posset.

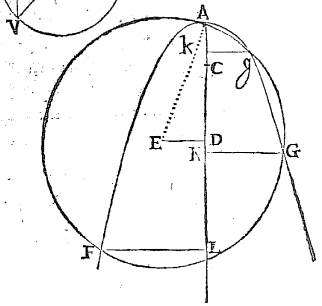


Dicebamus enim. Quoniam rectangulum F C G æquale est rectangulo A C B; vtrinque addito quadrato G C; ergo rectangulum F C G, plus quadrato G C, hoc est rectangulum E C G, æquabitur rectangulo A C B, plus quadrato G C; sed quadrato G C æquale est rectangulum C A B, ob parabolen; (est enim A B æqualis A K lateri recto) ergo rectangulum E C G, æquabitur rectangulo A C B, plus rectangulo C A B; sed rectangulum A C B, plus rectangulo C A B, est æquale quadrato A C; ergo rectangulum E C G, æquabitur quadrato A C; ergo vt E C, ad A C, ita A C, ad C G; sed vt A C, ad C G, ita C G, ad A B, ob parabolen, cùm rectangulum B A C, hoc est sub A K latere recto, & axe A C, æquale sit quadrato C G; ergo vt E C, ad A C, ita A C, ad C G, & vt A C, ad C G, ita C G, ad A B; ergo inter duas E C, A B, duæ quidem A C, C G mediæ continuè proportionales inuentæ sunt. At verò E C est ex constructione æqualis Z, & A B æqualis Y; ergo inter duas datas Z, Y, duas adinuenimus medias proportionales A C, C G, in continua ratione.

Quod facere propositum erat. Vides igitur hanc demonstrationem à superiori verbis tantùm differre.



Hinc etiam patebit anguli rectilinei trisectio. Sit igitur angulus rectilineus N O P; diuidendus trifariam, siuè arcus N Q T P, diuidendus sit in tres partes æquales; Sumatur N O, æqualis 1, pro radio circuli, & N P, æqualis q, pro subtensa dati arcus, atque N Q, æqualis u, pro subtensa trientis eiusdem arcus, erit vt N O, ad N Q, ita N Q, ad Q R, & ita Q R, ad R S; ducta nimirùm Q S, parallela ipsi T O; ductis autem N Q, O Q, & O T, & cùm O N, idem quod 1, & N Q, supponatur u, Q R, erit u^2, & R S, erit u^3, vnde consurget æquatio $u^3 = * 3u - q$; Et quia R S, seù u^3 impedit quo minus N P, sit tripla ipsius lineæ N Q, quæ nimirum est u; consurget æquatio proindè huiusmodi, $q = 3u - u^3$, Vel $u^3 = * 3u - q$.



Quod autem sint quatuor proportionales ON, N Q, Q R, R S, patet; nam triangulum O N Q, simile est triangulo N Q R; siquidem angulus ad Q, communis est; & angulus Q N R, hoc est Q N P, est insistens arcui Q P, cui insistit Q O P, cuius dimidium Q O T, seù N O Q; quarè N O Q, æquabitur Q N R; ac proindè triangula erunt similia, ergo vt O N, ad N Q, ità N Q ad Q R; & quia triangulum Q R S, simile est triangulo N Q R; angulus enim ad R, est communis; anguli, Q O T, seu Q O N, hoc est Q N R, & S Q R sunt inter se æquales, ergo, & reliquus Q S R æquabitur reliquo N Q R; quare triangula erunt æquiangula, atque adeò similia; scil. triangulum S R Q, simile erit triangulo N Q R; proindè, vt N Q, ad Q R, ita Q R, ad R S; sunt igitur proportionales O N, N Q, Q R, R S; Quod oportebat ostendere.

Totum autem istius Artis opus in eo positum est, vt æquationes propositæ ad vnam ex his formulis reducantur, videlicet.

$$u^3 = * -- p u + q$$
$$u^3 = * + p u + q$$
$$u^3 = * + p u -- q$$

Hac enim reductione facta citrà laborem, licebit radicem extrahere iuxtà præcepta elapsis temporibus inuenta, & nunc à nobis explicata.

Si igitur sit æquatio prima $u^3 = * -- pu + q$, hæc methodus obseruari debet. Sumatur $+\frac{1}{2}q$, illudque seruetur, mox autem accipiatur $\frac{1}{4}q^2$, cui addatur $\frac{1}{27}p^3$, & ex aggregato extrahatur latus quadratum, illudque addatur ipsi $+\frac{1}{2}q$, superius seruato: ex toto hoc autem aggregato, sumatur latus cubicum, cui subducatur latus cubicum huius residui, nempe sumatur ℞$(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; ex hoc autem latere subtrahatur $\frac{1}{2}q$, ita vt fiat $-- \frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; huius porrò residui latus cubicum erit ℞c$(--\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ factaque subtractione, vt dictum est, futura est radix, vt hic vides.

$$℞c(+\tfrac{1}{2}q + ℞(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)) -- ℞c(--\tfrac{1}{2}q + ℞(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3))$$

Hæc autem iuuabit numeris explicare. Sit æquatio huiusmodi.

$$\underset{u^3}{1c} + \underset{p}{72R} = \underset{q}{1720}$$

Huius æquationis radix erit.

$℞c(+860 + ℞(739600 + 13824)) -- ℞c(--860 + ℞(739600 + 13824))$

Hoc est $℞c(+860 + ℞753424) -- ℞c(--860 + ℞753424)$

Hoc est $℞c(+860 + 868) -- ℞c(--860 + 868)$

Hoc est $℞c\,1728 -- ℞c\,8$

Hoc est $12 -- 2$, Hoc est 10, & ita 10 erit radix propositæ æquationis.

Huius autem methodi demonstratio sic se habet.

A B C

Supponamus A B, æquari u, est autem u, radix superioris æquationis, quæ quidem supponitur valere 10, adeò vt A C, æquetur huic nempe $℞c(+\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3))$. Si igitur accipiatur residuum istud idest $℞c(--\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3))$ æquale nimirum lineæ B C, eorum differentia erit $℞c(†\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3)) -- ℞c(--\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3))$, & quidem æqualis erit hæc differentia ipsi A B. Si verò statuamus A B, æquari u, differentia cuborum ex prædictis radicibus, nempè differentia inter $\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3)$ nempè cubum ex $℞c(†\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q † \frac{1}{27}p^3))$, & hunc scilicet $--\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3)$ cubum scilicet ex $--℞c(--\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3))$ erit inquam istorum cuborum differentia æqualis q, vt patet ex opere multiplicationis.

Erit igitur q, differentia inter cubum lineæ A C, & cubum lineæ B C. Cubus autem ex A B; atque triplum productum rectarum A C, B C, A B, simul æquantur eidem differentiæ q; quandoquidem cubus ex AB; plus cubo, ex B C, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, simul æquatur cubo lineæ A C.

Cubus $+\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3)$ ex A C $= 12$
Cubus $--\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3)$ ex B C $= 2$
q Differentia cuborum supradictorum

Vt enim q, est differentia inter illos duos cubos $+\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ & $--\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$ ità cubus ex A B, plus triplo producto rectarum A C, B C, A B, simul; Proindè cubus ex A B, plus triplo producto, rectarum A C, B C, A B, æquabitur q. Proindè u^3, nempe cubus ex A B, vna cum triplo producto linearum A C, BC, A B, æquabitur q. Illud autem triplum productum comparabitur si multiplicemus binomium $℞c(+\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale rectæ A C, per residuum $℞c(--\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$ æquale rectæ B C. At verò instituta multiplicatione, vt vides ex $℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3)$ in se, fit certè $\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3$. Insuper ex $†\frac{1}{2}q$, in $--\frac{1}{2}q$, fit $--\frac{1}{4}q^2$; Si igitur ad istud $†\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, addatur $--\frac{1}{4}q^2$, fit summa $+\frac{1}{27}p^3$; Etenim $+$, & $--$, in additione subtrahuntur.

Producta

Producta verò facta ex $+\frac{1}{2}q$, & $--\frac{1}{2}q$ in Radicem illam nimirùm $℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; quoniam vnum euadit affectum signo †, alterum verò signo --; proindè se mutuò destruunt; quamodrè, si ducatur $℞c(†\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3))$ in hâc nimirùm $℞c(--\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$; fiet productū $℞c(\frac{1}{27}p^3)$ seu $\frac{1}{3}p$, nempè radix cubica ipsius $\frac{1}{27}p^3$; fit autem illud productum $℞c(\frac{1}{27}p^3)$; quoniam radices cubicæ ligatæ fuerunt multiplicatę; proindè etiam productū debet esse tale, nempè radix ligata &c. triplum autem productum (erat enim inæquatione plus triplo producto rectarum AC, BC, AB), erit quidem p, hoc autem si multiplicetur per u; quoniam productum ex AC, in BC, fuit ductum in A B; proindè fiet p u; quamobrem $u^3 + pu$, æquabitur q, vel u^3, æquabitur $--pu + q$, vel demum $u^3 + pu -- q = 0$.

$℞c(+\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$
$℞c(--\frac{1}{2}q + ℞(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3))$

$+℞c(\ldots\ldots) + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$
$--℞c(\ldots\ldots) -- \frac{1}{4}q^2$

$\frac{1}{27}p^3$
$℞c\,\frac{1}{27}p^3$
seu $\frac{1}{3}p$

Superius à nobis assumptum fuit, quod verissimum est nempè. Si fuerit recta A C vtcunque in B, diuisa, cubum lineæ A B, plus cubo lineæ B C, atque triplo producto linearum A C, B C, A B, simul æquari cubo lineæ A C. Supponamus A B, æquari a, & BC, æquari b, tota A C, æquabitur $a + b$; erit autem productum linearum AC, BC, AB, idem quod $b a^2 + b^2 a$, huius triplū est $3 b a^2 + 3 b^2 a$, huic autem si addantur cubi linearum A B, B C, fiet $a^3 + 3 b a^2 + 3 b^2 a + b^3$; hæc autem summa, æqualis est cubo ex recta A C, nam hæc erat $a + b$, cuius cubus constat opere multiplicationis.

$a + b$
$a + b$

$b a + b^2$
$a^2 + b a$

$a^2 + 2 b a † b^2$
$a + b$

$b a^2 + 2 b^2 a + b^3$
$a^3 + 2 b a^2 + b^2 a$

$a^3 + 3 b a^2 † 3 b^2 a + b$

Vidimus hactenus methodum explicādi primum æquationis genus nunc ad secundum.

Sit igitur æquatio $u^3 = * † pu † q$, siuè quod idem est $u^3 -- pu = q$; huius æquationis radix erit $℞c(+\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3)) + ℞c(+\frac{1}{2}q -- ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3))$. Suponamus $℞c(†\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3))$ æquari AB, & deinde BC, esse $℞c(†\frac{1}{2}q -- ℞(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3))$, Summa cuborum, vtriusque lineæ, erit q.

Si AC, æquetur u, cuius cubus erit u^3, si ab eius cubo iam dicto, auferatur triplum productū linearum A B, BC. & AC, seu u remanebunt cubi linearum AB, BC, qui simul sumpti æquātur q. Triplum enim productum, rectarum AB, BC, & AC, seu u, plus cubis rectarū AB, BC, æquatur cubo ex AC, seù ex u; quare si à cubo ex AC, seù u, nempè ab u^3, auferamus triplum productum, ex AB, BC, & u, remanebunt cubi linearum A B, B C, hi autem simul sumpti sunt æquales q. At verò productum ex A B, & B C, est $℞c\,\frac{1}{27}p^3$, Siuè $\frac{1}{3}p$.

$†\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3)$
$†\frac{1}{2}q -- ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3)$
q Summa cuborum

productū ex AB, BC, hoc est ex $℞c(\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}))$ in $℞c(†\frac{1}{2}q -- ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3))$ est $℞c\,\frac{1}{27}p^3$, siuè $\frac{1}{3}p$, vt patet ex opere multiplicationis. Si enim $†℞(\frac{1}{4}q -- \frac{1}{27}p^3)$ ducatur in $--℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3)$. ob signa †, & --, fiet productum $--\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, multiplicata verò vtraque radice per $†\frac{1}{2}q$, euanescent producta ob signa †, & --, & remanet $†\frac{1}{2}q$, in se ducendum, vt fiat $\frac{1}{4}q^2$, quo addito ad $--\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, fiet sūma $℞c\,\frac{1}{27}p^3$, & erit totum productum ex illa multiplicatione. Quamobrem eius radix cubica $\frac{1}{3}p$, erit quoque productum; huius autem triplum est p, quo ducto in u, fit p u, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C; & quia u^3, minus huiusmodi triplo producto æquabatur cubis ex A B, B C, qui æquales erant q; proindè $u^3 -- pu$, æquabitur q.

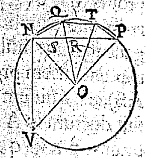
$℞c(†\frac{1}{2}q † ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3))$
$℞c(†\frac{1}{2}q -- ℞(\frac{1}{4}q^2 -- \frac{1}{27}p^3))$

$+℞c(\ldots\ldots) -- \frac{1}{4}q^2 † \frac{1}{27}p^3$
$\frac{1}{4}q^2 -- ℞c(\ldots\ldots)$

$℞c\,\frac{1}{27}p^3$
seu $\frac{1}{3}p$

Numeris

Numeris autem illustratur superior doctrina hunc in modum. Sit æquatio 1 c -- 72 R = 280. Sumatur dimidium numeri 280, nempè 140, & ab eius quadrato subtrahatur 13824, nempè quotiens, qui oritur diuiso 373248, cubo ex 72, per 27, & remanet 5776, cuius radix quadrata est 76, qua subtracta ex 140, remanet 64, huius radix cubica est 4, quæ seruanda est. Sumatur idem 140, cui addatur 76, nempè radix illius numeri 5776, ortum ducentis ex illa subtractione; facta autem additione habetur 216; cuius latus cubicum est 6, cui addatur latus cubicum 4, superius seruatum, & fiet 10, pro radice quæsita.



Non raró contingit stante æquatione $u^3 = * pu + q$, Seù $u^3 -- pu = q$; Quadratum dimidij vltimi termini scilicet q, non esse maius cubo trientis quantitatis cognitæ, penultimi termini nempè p; Tunc supponendus circulus N Q P V, cuius semidiameter erit N O, isque sit ℞ $\frac{1}{3}$ p; siue media proportionalis inter tertiam partem quantitatis notæ p, & vnitatem. Huic circulo supponatur inscripta N P, quæ sit $\frac{3q}{p}$ nempè, vt sit ad alteram datam quantitatem q, vt vnitas ad tertiam partem ipsius p; modo vterque arcus, tam scilicet N Q P, quàm N V P, diuidatur trifariam; tunc enim N Q, radix erit quæsita quemadmodum N V. Itaque istius æquationis radix non alio modo exprimetur, quam dicendo, esse subtendentem illius arcus, qui tertia pars est arcus illius cuius subtendens est $\frac{3q}{p}$, radio siuè semidiametro existente vno. Vel illa, quæ subtendit tertiam partem reliqui arcus &c.

Quamobrem si daretur æquatio 1 c -- 30 R = 36; procedendum, vt supra. Sed ad generalem nostram construendi rationem accedamus.

Lineæ MEDICEAE, *quas Auctor ad generalem Effectionem Problematum excogitauit, luculenter explicantur.*

Prætermissis autem Lineis antiquitùs excogitatis, de quibus iam suprà multa diximus; proximum est, vt quas adinuenimus, hic subijciamus, quarum tria sunt genera. Quorum Primum decem continet Lineas.

Primum genus Linearum MEDICEARVM, *& ad hoc primum genus pertinentium*

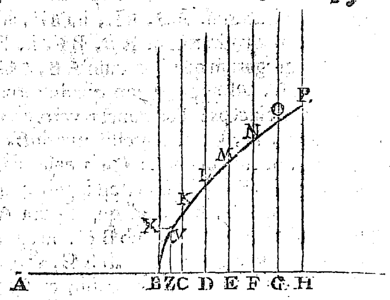
PRIMA

Pro effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit $a^2 + ba = z^2$.

PRimi generis Linearum, quas Mediceas appello, prima quidem est illa, quæ ad Geometricam effectionem conducit Problematum eorum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, dataque coefficiente longitudine. Idem profectò, quod, dissimulare non licet, Circuli beneficio consequimur; quia tamen nobis propositum, est lineis, quas adinuenimus, Problematibus omnibus obuiam ire; hanc ob id placuit quoque in medium inuehere, nè ex hac parte defecisse videremur.

Sit igitur æquatio $a^2 + ba = z^2$*, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in Analogismum, vt par est; fiet vt* $a + b$*, ad z, ita z, ad a.*

Exposita



Exposita sit recta A B, quæ sit coefficiens longitudo, eaque intelligatur ad partes B, in infinitum producta; & in ipsa producta sumantur qualescunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H &c. erigantur perpendiculares, & inter AC, BC, media reperiatur proportionalis; item inter A D, B D; item inter A E, B E; insuper inter A F, B F; item inter AG, BG, insuper inter A H, B H; & ita deinceps, quibus medijs proportionalibus fiant æquales C K, D L, E M, F N, G O, H P. Per puncta verò B, K, L, M, N, O, P, intelligatur ducta quadam linea, hæc illa est, quæ ad Effectionem prædictam conducit; erit enim rectangulum A C B, æquale quadrato C K, nec dissimiliter rectangulum A D B, æquale quadrato D L, & sic de reliquis sed rectangulum A C B æquale est quadrato B C, vnà cum rectangulo A B C; ergo quadratum B C, vnà cum rectangulo A B C, æquabitur quadrato C K, & quadratum B D, vnà cum rectangulo A B D æquabitur quadrato D L, & ita deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea B K L M N O P, vt si ex quocunque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, quadratum B Z, vnà cum rectangulo A B Z, æquale sit quadrato Z Y; quamobrem si coefficiens longitudo fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B; secetur B X æqualis rectæ, quæ possit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y parallela ipsi A H; ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; quadratum B Z, vna cum rectangulo A B Z, æquabitur quadrato Z Y, seu B X. Innotescit igitur ignota quantitas, nempe B Z, vtpote illa, cuius quadratum vna cum rectangulo A B Z æquatur quadrato B X. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadratum, vnà cum rectangulo sub eadem, dataque coefficiente longitudine A B, æquale sit quadrato B X dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur est genesis primæ lineæ ex ijs quas adinueni, quasque Mediceas appello.

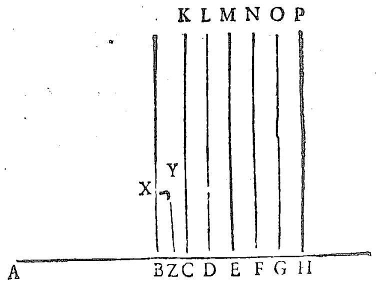
Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit $a^3 + b^2 a = b^2 d$.

SEcunda linearum medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione solidi sub latere, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^3 + b^2 a = b^2 d$*, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt* $a^2 + b^2$ *ad* b^2*, ita d ad a.*



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum sublaterale, eaque intelligatur ad partes B in infinitum protracta; sumantur qualescunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares. Fiat autem vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B C, ità B C ad segmentum in C K; & vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B D, ità B D ad segmentum in D L; vt quadratum A B ad aggregatum

gatum quadratorum A B, B E, ità B E, ad segmentum in E M; vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B F, ità B F, ad segmentum in F N; vt quadratum A B ad aggregatum quadratorum A B, B G, ità B G, ad segmentum in G O; vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B H, ità B H, ad segmentum in H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initio sunt B, D, E, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt quadratum A B, ad aggregatum quadratorum A B, B C, ità B C, ad segmentum in C K, erit conuertendo vt aggregatum quadratorum A B, B C, ad quadratum A B, ità prædictum segmentum in C K, ad B C; quamobrem solidum sub B C, in aggregatum quadratorum A B, B C, hoc est cubus ex B C, vnà cum solido sub B C, & quadrato A B, æquabitur solido abs segmento in C K in quadratum A B; & cubus ex B D, vnà cum solido ab eadem B D in quadratum A B, æquabitur solido abs segmento in D L in quadratum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocunque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, quadratum B Z, vnà cum quadrato A B, ad quadratum A B, rationem habeat, vt Z Y, ad B Z; atque adeò solidum factum abs B Z in planum, quod constat duobus quadratis rectarum A B, B Z, æquabitur solido facto abs Z Y in quadratum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y parallela ipsi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z, solidum factum abs B Z in planum, quod constat duobus quadratis rectarum A B, B Z, hoc est cubus B Z, vnà cum solido abs eadem B Z in quadratum A B, æquabitur solido abs Z Y in quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius cubus, vnà cum solido ab eadem B Z, in quadratum A B, æqualis est solido abs Z Y in quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, cum eius cubus vnà cum solido ab eadem in quadratum A B æqualis sit solido abs Z Y, hoc est B X, in quadratum eiusdem A B dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est genesis secundæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

TERTIA

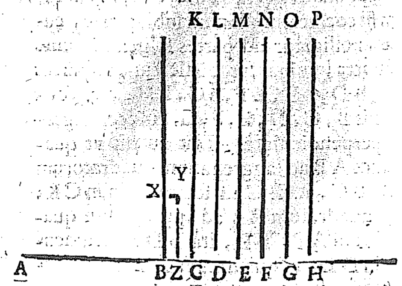
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^3 + b a^2 = b^2 d.$$

TErtia Medicearum linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua cubus afficitur adiunctione solidi sub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^3 + b a^2 = b^2 d$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^2 + b a$ ad b^2, ità d, ad a.

Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo sub quadratica, eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipsa in infinitum, protracta sumantur qualescunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigantur perpendiculares, fiat autem vt quadratum A B, ad aggregatum ex quadrato B C, & rectangulo A B C, hoc est ad rectangulum A C B, ità B C ad segmentum in C K, deindè vt quadratum



A B, ad

A B, ad rectangulum A D B, ità B D, ad segmentum in D L, & vt quadratum A B, ad rectangulum A E B, ità B E ad segmentum in E M; & vt quadratum A B ad rectangulum A F B, ità B F ad segmentum in F N; præterea vt quadratum A B ad rectangulum A G B, ità B G ad segmentum in G O, & vt quadratum A B ad rectangulum A H B, ità B H ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit. Cùm enim sit, vt quadratum A B, ad rectangulum A C B, ità B C ad segmentum in C K; erit conuertendo, vt rectangulum A C B, ad quadratum A B, ità segmentum in C K ad B C; quamobrem solidum abs B C in rectangulum A C B, hoc est in quadratum B C, vnà cum rectangulo A B C, hoc est cubus ipsius B C, vnà cum solido sub A B in quadratum eiusdem B C, æquabitur solido abs segmento in C K, in quadratum eiusdem A B; & cubus ex B D, vnà cum solido ex A B in quadratum B D, æquabitur solido abs segmento D L in quadratum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocunque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit quad. B Z, vnà cum rectang. A B Z, hoc est rectangulum A Z B, ad quad. A B vt Z Y ad B Z; atq; adeò solidum factum abs B Z in rectangulum A Z B, seu in planum, quod constat quadrato B Z, & rectangulo A B Z, æquabitur solido facto abs Z Y, in quadratum A B; & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo sub quadratica fuerit recta A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z, solidum factum abs B Z in rectangulum A Z B, seu in planum, quod constat quadrato B Z, & rectangulo A B Z, hoc est cubus B Z vnà cum solido ab eiusdem B Z quadrato in longitudinem A B, æquabitur solido abs Z Y in quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius cubus, vnà cum solido ab eiusdem B Z quadrato in longitudinem A B, æqualis est solido abs Z Y, in quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius cubus, vnà cum solido à quadrato eiusdem in longitudinem A B, æqualis sit solido abs Z Y, seu B X, in quadratum eiusdem A B dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est genesis tertiæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

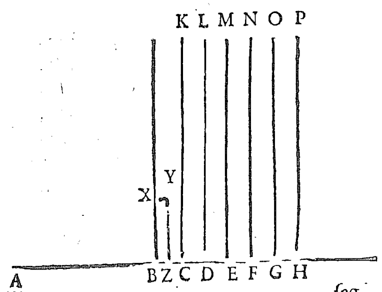
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^4 + b^3 a = b^3 d.$$

QVarta Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani sub latere, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^4 + b^3 a = b^3 d$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^3 + b^3$ ad b^3, ità d, ad a.

Exposita sit recta A B, cuius cubus sit coefficiens solidum sublaterale; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigatur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B, ità B C, ad segmentum in C k, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & cubo A B, ità B D, ad



seg-

segmentum in D L, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B E, & cubo A B, ità B E, ad segmentum in E M; & vt cubus A B ad solidum constans cubo B F, & cubo A B, ità B F ad segmentum in F N, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & cubo A B, ità B G ad segmentum in G O; præterea vt cubus A B ad solidum constans cubo B H & cubo A B, ità B H, ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit. Cum enim sit, vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B ità B C, ad segmentum in C K; erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & cubo A B, ad cubum A B, ità segmentum in C K, ad B C; quapropter plano-planum factum abs B C, in solidum constans cubo B C, & cubo A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B C, vnà cum plano-plano abs B C in cubum A B, æquabitur plano-plano abs segmento in C K in cubum A B, & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano ab eadem B D, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs segmento in D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z, atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano abs B Z, in cubum A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrē si coefficiens solidum sublaterale fuerit cubus A B, & in perpēdiculari, erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum abs B Z, in solidum constans cubo B Z, & cubo A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B Z, vnà cum plano-plano abs B Z, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum vnà cum plano-plano ab eadem B Z, in cubum A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, cum eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano ab eadem in cubum A B, æquale sit plano-plano abs Z Y, seu B X, in cubum eiusdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis quartæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

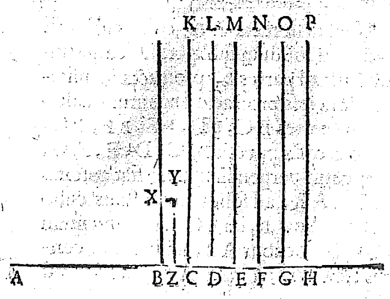
QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^4 + b a^3 = b^3 d.$$

QVinta Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani sub cubo, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^4 + b a^3 = b^3 d$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est fit, vt* a^3 $+ b a^3$ *ad* b^3, *ità* d *ad* a.



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo, eaque intelligatur ad partes B, producta in infinitum, & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido à quadrato eiusdem B C, in longitudinem A B, ità B C, ad segmentum in C K, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & solido à quadrato B D, in longitudinem

tudinem

tudinem A B, ità B D, ad segmentum in D L, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B E, cum solido à quadrato B E, in longitudinem A B, ità B E, ad segmentum in E M; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B F, & solido à quadrato B F, ad longitudinem A B, ità B F ad segmentum in F N, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, vnà cum solido à quadrato B G, in longitudinem A B, ità B G ad segmentum in G O; præterea vt cubus A B ad solidum constans cubo B H, cum solido à quadrato B H, in longitudinem A B, ità B H, ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cum enim sit, vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido à quadrato B C, in longitudinem A B, ità B C, ad segmentum in C K; erit conuertendo vt cubus B C, vnà cum solido à quadrato B C, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità segmentum in C K, ad B C: Quapropter plano-planum factum abs B C, in solidum constans cubo B C, & solido à quadrato B C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B C, vnà cum plano-plano à cubo eiusdem B C, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs segmento in C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano à cubo B D, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea iam dicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum solido à quadrato eiusdem B Z, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z, atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à cubo B Z, in longitudinem A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo subcubica fuerit A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum abs B Z, in solidum constans cubo B Z, & solido à quadrato eiusdem B Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B Z, vnà cum plano-plano à cubo eiusdem B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à cubo eiusdem B Z, in longitudinem A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, cùm eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à cubo eiusdem in longitudinem A B, æquale sit plano-plano abs Z Y, seu B X, in cubum eiusdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis quintæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

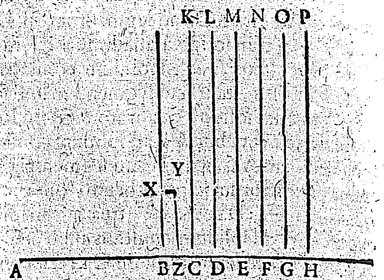
SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^4 + b^2 a^2 = b^3 d.$$

SExta Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur adiunctione plano-plani sub latere, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^4 + b^2 a^2 = b^3 d$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est fit, vt* a^3 $+ b^2 a$ *ad* b^3, *ità* d *ad* a.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum est coefficiens planum subquadraticum, eaque intelligatur ad partes B, producta in infinitum, & in ipsa producta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus AB, ad solidum constans cubo B C, & solido ab eadem B C, in quadratum A B, ità B C, ad segmentum ipsius C K, & rursus vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & solido ab eadem B D, in quadratum A B, ità B D, ad segmentum ipsius D L; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B E, & solido ab eadem B E, in quadratum A B, ità B E, ad segmentum ipsius E M; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B F, & solido ab eadem B F, in quadratum A B, ità B F, ad segmentum ipsius F N; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & solido ab eadem B G, in quadratum A B, ità B G, ad segmentum ipsius G O; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B H, & solido ab eadem B H, in quadratum A B, ità B H, ad segmentum ipsius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido ab eadem B C, in quadratum A B, ità B C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & solido ab eadem B C, in quadratum A B, ad cubum A B, hoc est cubus B C, vnà cum solido ab eadem B C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità segmentum ipsius CK, ad B C, &c. quapropter plano-planum factum abs B C, in solidum constans cubo B C, & solido ab eadem B C, in quadratum A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius B C, vnà cum plano-plano à quadrato ipsius B C, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius C K, in cubum A B; & quadrato-quadratum ex B D, vnà cum plano-plano à quadrato eiusdem B D, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea iam dicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum solido ab eadem B Z, in quadratum A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad B Z; atque adeò quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à quadrato eiusdem B Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si subquadraticum coefficiens planum fuerit quadratum ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z: Plano-planum factum abs B Z, in solidum constans cubo eiusdem B Z, & solido ab ipsa B Z, in quadratum A B, hoc est quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano à quadrato eiusdem B Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à quadrato eiusdem B Z, in quadratum A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius quadrato-quadratum, vnà cum plano-plano à quadrato eiusdem in quadratum A B, æquale sit plano-plano abs Z Y, seu B X, in cubum eiusdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis sextæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello,

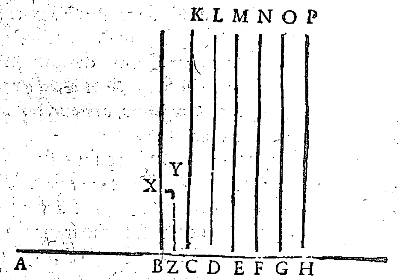
Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SEPTIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$a^5 + b^4 a = b^4 d$.

Septima Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub latere, datoque coefficiente plano-plano.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^4 a = b^4 d$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt* $a^4 + b^4$ *ad* b^4, *ità* d, *ad* a.



Exposita sit recta A B, cuius quadrato-quadratum sit coefficiens plano-planum sublaterale; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum, & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; fiat autem resolutio quadrato quadratorum in simplices longitudines, vt suo loco tradidimus, secundum positam quantitatem. Quadrato-quadratum A B, resolutum sit in longitudinem α, & quadrato-quadratum ex B C, resolutum sit in longitudinem β, & quadrato-quadratum B D, resolutum sit in longitudinem γ, quadrato-quadratum B E, in longitudinem δ, quadrato-quadratum B F, in longitudinem ε quadrato-quadratum B G, in longitudinem ζ, Quadrato-quadratum B H, in longitudinem η, & sic deinceps. Deindè ex his duabus α, & β, fiat μ, mox verò fiat, vt α, ad μ, ità B C, ad segmentum ipsius C k, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt B C, ad segmentum ipsius C K, ità α, ad μ; ergo conuertendo erit vt μ ad α, ità segmentum ipsius C K, ad B C, quapropter plano-solidum factum abs β seu B C, in plano planum constans α seu quadrato-quadrato A B, & β seu quadrato-quadrato B C hoc est quadrato-cubus ipsius B C, vnà cum plano-solido ab eadem B C, in quadrato-quadratum ipsius A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum eiusdem A B; & quadrato-cubus ex B D, vnà cum plano-solido ab eadem B D, in quadrato-quadratum ipsius A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L in quadrato-quadratum eiusdem A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta vt si ex quocunque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum BZ, vnà cum quadrato-quadrato A B, ad quadrato-quadratum A B, ità Z Y ad B Z; atque adeò quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-solido ab eadem B Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, in quadrato-quadratum A B; & sic de reliquis; Quamobrem si coefficiens plano-planum sublaterale fuerit quadrato-quadratum ipsius A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur BX, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum ipsius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs B Z, in plano-planum constans quadrato-quadrato ipsius B Z, & quadrato-quadrato ipsius A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vnà cum plano-solido ab eadem B Z, in quadrato-quadratum A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

plano-solido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æquatur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z; cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano solido ab eadem in quadrato-quadratum A B, æqualis sit plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum eiusdem A B dato comparationis homogeneo.

Hæc igitur est genesis Septimæ lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

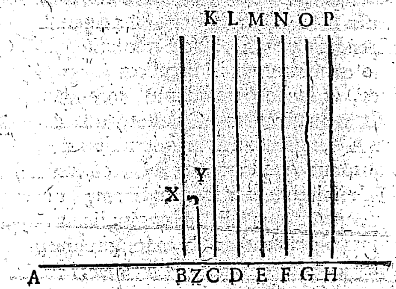
Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

OCTAVA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$a^5 + b^3 a^2 = b^3 d^2$.

OCtaua Medicearum Linearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub quadrato, datoque coefficiente solido.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^3 a^2 = b^3 d^2$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in Analogismum, vt par est; fit vt* $a^3 + b^3$, *ad* b^3, *ita* d^2 *ad* a^2.



Exposita sit recta A B, cuius cubus sit coefficiens solidum sub quadraticum; eaque intelligatur ad partes B, protracta in infinitum; & in ipsa protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B, ità quadratum B C, ad quadratum segmenti ipsius C K; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & cubo A B, ità quadratum B D, ad quadratum segmenti ipsius D L; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B E, & cubo A B, ità quadratum B E, ad quadratum segmenti ipsius E M; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B F, & cubo A B, ità quadratum B F, ad quadratum segmenti ipsius F N; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & cubo A B, ità quadratum B G, ad quadratum segmenti ipsius G O; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B H, & cubo A B, ità quadratum B H, ad quadratum segmenti ipsius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & cubo A B, ità quadratum B C, ad quadratum segmenti ipsius C K; erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & cubo A B, hoc est cubus B C, vnà cum cubo A B; ad cubum A B, ità quadratum segmenti ipsius C K, ad quadratum B C; Quapropter plano-solidum factum à quadrato B C, in solidum constans cubo B C, & cubo A B; hoc est quadrato-cubus ipsius B C, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B C, in cubum A B, æquabitur plano-solido à quadrato segmenti ipsius C K, in cubum eiusdem A B: & quadrato-cubus ex B D, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B D, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato segmenti ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta; vt si ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens iam dictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus B Z, vnà cum cubo A B, ad cubum A B, ità quadratum Z Y, ad quadratum B Z; atque adeò quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis; Quamobrem si sub-

qua-

quadraticum coefficiens solidum fuerit cubus ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in cubum A B, facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H; ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs quadrato B Z, in solidum constans cubo B Z, & cubo A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vna cum plano-solido à quadrato eiusdem B Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B; Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpote illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem B Z, in cubum A B, æquatur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido à quadrato eiusdem in cubum A B, æqualis sit plano-solido abs quadrato Z Y, seu quadrato B X, in cubum eiusdem A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Octauæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

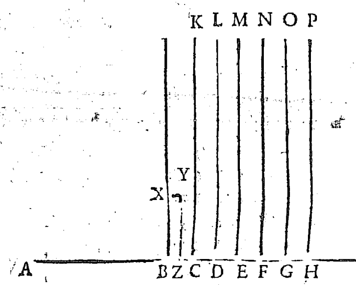
Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

NONA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$a^5 + b^2 a^3 = b^3 d^2$.

NOna Medicearum Linea ad Geometricam effectionem conducit Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub cubo, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^5 + b^2 a^3 = b^3 d^2$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt* $a^3 + b^2 a$, *ad* b^3, *ità* d^2 *ad* a^2.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum, subcubicum, eaque intelligatur ad partes B; in infinitum protracta, & in ipsa producta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, ità quadratum B C, ad quadratum segmenti ipsius C K; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B D, & solido abs B D, in quadratum A B, ità quadratum B D, ad quadratum segmenti ipsius D L; Deindè vt cubus B E, ad solidum constans cubo B E, & solido abs B E, in quadratum A B, ità quadratum B E, ad quadratum segmenti ipsius E M; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B F, & solido abs B F, in quadratum A B, ità quadratum B F, ad quadratum segmenti ipsius F N; & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B G, & solido abs B G, in quadratum A B, ità quadratum B G, ad quadratum segmenti ipsius G O, & vt cubus A B, ad solidum constans cubo B H, & solido abs B H, in quadratum A B, ità quadratum B H, ad quadratum segmenti ipsius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad effectionem prædictam conducit; Cùm enim sit vt cubus A B, ad solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, ità quadratum B C, ad quad. segmenti ipsius C K; erit conuertendo, vt solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità quadratum segmenti ipsius C K, ad quadratum B C; quamobrem plano-solidum abs B C, quadrato in solidum constans cubo B C, & solido abs B C, in quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B C, vnà

cum

cum plano-solido abs cubo B C, in quadratum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato segmenti ipsius C K, in cubum A B; & quadrato-cubus abs B D, vnà cum plano-solido eiusdem B D, cubi in quadratum A B, æquabitur plano-solido ex quadrato segmenti ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, quadrato-cubus B Z, vnà cum plano-solido ex cubo B Z, in quadratum A B, sit æqualis plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens planum subcubicum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis ei, cuius quadratum ductum in cubum ipsius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; plano-solidum factum abs quadrato B Z, in solidum constans cubo B Z, & solido ab eadem B Z, in quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vnà cum plano-solido ab eiusdem B Z, cubo, in quadratum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato cubus, vnà cum plano-solido ab eiusdem B Z cubo, in quadratum A B, æqualis est plano-solido abs Z Y, hoc est B X, quadrato, in cubum ipsius A B. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, cùm eius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido ab eiusdem cubo in quadratum A B, æqualis sit plano-solido ex Z Y, hoc est B X, quadrato, in cubum A B, dato comparationis homogeneo.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis nonæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad primum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

DECIMA

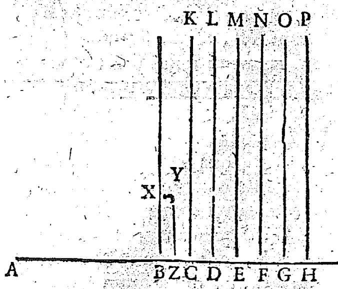
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 + b a^4 = b^4 d.$$

DEcima Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur adiunctione plano-solidi sub quadrato-quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^5 + b a^4 = b^4 d$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^4 + b a^3$ ad b^4, ita d, ad a.

Exposita sit recta A B, quæ sit coefficiens longitudo subquadrato-quadratica, eaque intelligatur in infinitum ad partes B, protracta, & in hac ipsa protracta sumantur qualescunque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares, Deindè quadrato-quadratum ipsius A B, resoluatur in longitudinem α, mox verò quadrato-quadratum B C, resoluatur in longitudinem β, & plano-planum sub cubo B C, & longitudine A B, resoluatur in longitudinem γ; item quadrato-quadratum B D, in longitudinem δ; & plano-planum sub B D, cubo,, & longitudine A B, in longitudinem ε, & sic de reliquis; vt autem α ad β, plus γ, ita fiat B C, ad segmentum ipsius C K; & vt α, ad δ, plus ε, ità fiat B D, ad segmentum ipsius D L, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt α ad β plus γ, ità B C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo vt β plus γ ad α, hoc est quadrato-



qua-

quadratum B C, plus plano-plano à cubo eiusdem B C, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad B C; erit ob id plano-solidum factum abs B C, in plano planum constans quadrato-quadrato B C, & plano plano ex cubo B C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B C, plus plano-solido abs quadrato-quadrato B C, in longitudinem A B, æqualis plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum A B; & quadrato-cubus B D, vnà cum plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem B D, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L, in quadrato-quadratum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocunque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum B Z, vnà cum plano-plano abs cubo B Z, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ita Z Y, ad B Z; atque adeò quadrato-cubus ex B Z, vnà cum plano-solido ex quadrato-quadrato B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo subquadrato-quadratica fuerit A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs B Z, in plano-planum constans quadrato-quadrato B Z, & plano-plano abs cubo B Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius B Z, vnà cum plano-solido abs quadrato-quadrato eiusdem B Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus, vnà cum plano-solido abs quadrato-quadrato eiusdem B Z, in longitudinem A B, æquatur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis decimæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Secundum Genus Linearum MEDICEARVM, *& ad huiusmodi genus pertinentium*,

PRIMA

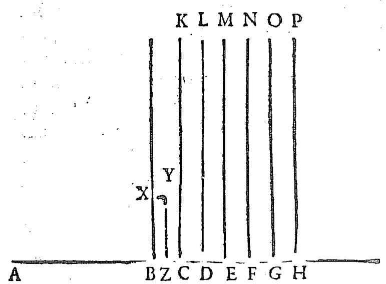
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^2 - b a = z^2.$$

DEcima prima Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem in qua quadratum afficitur multa plani sublatere, dataque coefficiente longitudine; Etsi autem idem circuli beneficio consequi licet, ob eam tamen, quam attulimus causam de prima differentes linea placet hanc pariter adsciscere.

Sit igitur æquatio $a^2 - b a = z^2$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est fit, vt $a - b$ ad z, ita z ad a.

Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo, & in hac ad partes B, in infinitum protracta acceptæ sint qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ità deinceps. Ex punctis verò B, C, D, E, F, G, H, perpendicularibus erectis, fiat vt A C, ad segmentum ipsius C K, ità prædictum segmentum eiusdem C K, ad B C, & vt A D, ad segmentum ipsius D L, ità hoc idem segmentum ad B D, & vt A E, ad segmentum ipsius E M, ita hoc idem segmentum ad B E, & vt A F, ad segmentum ipsius F N, ita hoc idem segmentum ad F B, & vt A G, ad segmentum ipsius G O; ita hoc idem segmentum ad B G, & vt A H, ad segmentum ipsius H P, ità hoc idem segmentum ad B



N, &

N, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt A C, ad segmentum ipsius C K, ita hoc idem segmentum ad C B, & vt A D, ad segmentum ipsius D L, ità hoc idem segmentum ad D B, & sic de reliquis, rectangulum A C B, æquabitur quadrato segmenti ipsius C K, & rectangulum A D B, æquabitur quadrato segmenti ipsius D L, &c. Sed rectangulum A C B, est æquale quadrato A C, minus rectangulo C A B; ergo quadratum A C, minus rectangulo C A B, æquabitur quadrato segmenti ipsius C K, & quadratum A D, minus rectangulo D A B, æquabitur quadrato segmenti ipsius D L, & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est linea prædicta, vt si ex quocumq; puncto ex. gr. Z, perpendicularis quædam erigatur Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, æquale sit quadrato Z Y. Quamobrem si coefficiens longitudo fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B secetur B X, æqualis rectæ, quæ possit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, æquabitur quadrato Z Y, seu B X. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadratum minus rectangulo sub eadem, dataque coefficiente longitudine A B, æquale est quadrato B X, dato comparationis homogeneo. Propositæ igitur æquationis radix est B Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc itaque est Genesis Lineæ Decimæ Primæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

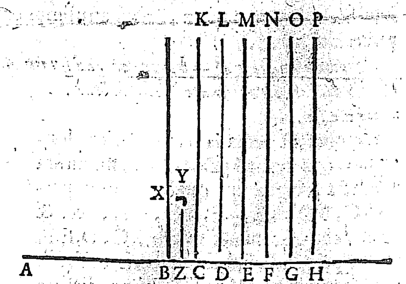
SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^3 - b^2 a = b^2 d.$$

Decima secunda Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua cubus multa multa solidi sub latere, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur; Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^2 - b^2$ ad b^2, ita d ad a.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum sublaterale, & in ea ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c, erigantur perpendiculares; Fiat autem vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A C, ità A C, ad segmentum ipsius C K, & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A D, ità fiat A D, ad segmentum ipsius D L; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum A B, superatur à quadrato A E, ità fiat A E, ad segmentum ipsius E M; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A F, ità A F, ad segmentum ipsius F N; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A G, ità A G, ad segmentum ipsius G O; & vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A H, ità A H, ad segmentum ipsius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, E, &c. intelligatur ducta quædam Linea, hæc

illa

illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt quadratum A B, ad excessum, quo idem quadratum superatur à quadrato A C, ità A C ad segmentum ipsius C K; erit conuertendo, vt quadratum A C, minus quadrato A B, ad quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C: quamodrem solidum sub A C, in quadratum A C, minus quadrato A B; hoc est cubus ex A C, minus solido ab eadem A C, in quadratum A B, æquabitur solido abs segmento ipsius C K, in quadratum A B: & cubus ex A D, minus solido ab eadem A D, in quadratum A B, æquabitur solido abs segmento ipsius D L, in idem quadratum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta; vt si ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens iam dictæ lineæ in puncto Y, quadratum A Z, minus quadrato A B, ad quadratum A B, habeat rationem, vt Z Y, ad A Z; atque adeò solidum factum abs A Z, in planum, quo quadratum A B, superatur à quadrato A Z, hoc est cubus ex A Z, minus solido ex A Z, in quadratum A B, æquabitur solido facto abs Z Y, in quadratum A B, & sic de reliquis; Quamobrem si coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, solidum factum abs A Z, in planum, quo quadratum A B, superatur à quadrato A Z, hoc est cubus A Z, minus solido ab eadem A Z, in quadratum A B, æquabitur solido abs Z Y, in quadratum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius cubus multatus solido ab eadem A Z, in quadratum A B, æqualis est solido abs Z Y, in quadratum A B. Propositæ igitur æquationis radix est A Z, cùm eius cubus &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Decimæ secundæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

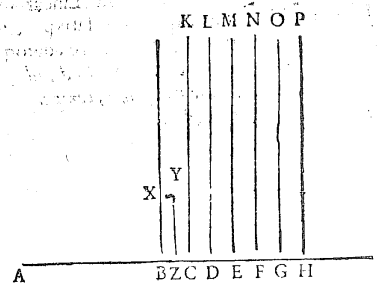
TERTIA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^3 - b a^2 = b^2 d.$$

Decima tertia Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Cubus afficitur multa solidi sub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^3 - b a^2 = b^2 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^2 - b a$, ad b^2, ità d ad a.



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo subquadratica, & in ea ad partes B, protracta in infinitum sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat verò vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum C A B, superatur à quadrato A C, ita A C, ad segmentum ipsius C K; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum D A B, superatur à quadrato A D, ità A D, ad segmentum ipsius D L; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum E A B, superatur à quadrato A E, ità A E, ad segmentum ipsius E M; & vt quadratum A B, ad excessum quo rectangulum F A B superatur à quadrato A F, ità A F, ad segmentum ipsius F N; & vt quadratum A B, ad excessum, quo rectangulum G A B, superatur à quadrato A G,

D ità

ità A G, ad ſegmentum ipſius G O; & vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum H A B, ſuperatur à quadrato A H, ita A H, ad ſegmentum ipſius H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt quadratum A B, ad exceſſum, quo rectangulum C A B, ſuperatur à quadrato A C, ita A C, ad ſegmentum ipſius C K; erit conuertendo, vt exceſſus, quo quadratum A C, ſuperat rectangulum C A B, ad quadratum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C; & ſic de reliquis; quamobrem ſolidum abs A C, in exceſſum, quo quadratum A C, ſuperat rectangulum C A B, hoc eſt in quadratum A C, minus rectangulo C A B, hoc eſt cubus ipſius A C, minus ſolido ſub A B, in quadratum eiuſdem A C, æquabitur ſolido abs ſegmento ipſius C K, in quadratum ipſius A B, & cubus ex A D, minus ſolido ſub A B, in quadratum ipſius A D, æquabitur ſolido abs ſegmento ipſius D L, in quadratum eiuſdem A D; & ità deinceps. Huiuſmodi igitur Indolis eſt Linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ſit quadratum A Z, minus rectangulo Z A B, ad quadratum A B, vt Z Y, ad A Z; atque adeò ſolidum factum abs A Z, in exceſſum, quo quadratum A Z, ſuperat rectangulum Z A B, hoc eſt cubus A Z, minus ſolido A B, in quadratum A Z, æquabitur ſolido facto abs Z Y, in quadratum A B, & ſic de reliquis. Quamobrem ſi coefficiens longitudo ſubquadratica fuerit recta A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipſi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, ſolidum abs A Z, in exceſſum, quo quadratum A Z, ſuperat rectangulum Z A B, hoc eſt cubus ex A Z, minus ſolido ab eiuſdem A Z, quadrato, in longitudinem A B, æquabitur ſolido abs Z Y, quadratum A B; Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius cubus, minus ſolido ab eiuſdem A Z, quadrato in longitudinem A B, æqualis eſt ſolido abs Z Y; in quadratum A B; Propoſitæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius cubus, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis Decimæ tertiæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

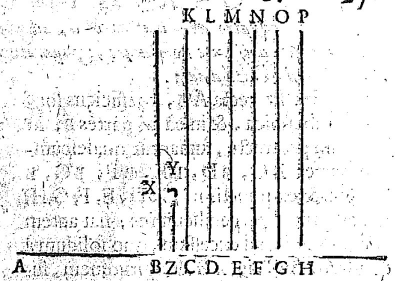
Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^4 - b^3 a = b^3 d.$$

Decima Quarta Medicearum Linearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub latere, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^4 - b^3 a = b^3 d$, *ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica Effectio, dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in Analogiſmum, vt par eſt; fit vt* $a^3 - b^2$, *ad* b^3, *ita d ad a.*

Expoſita



Expoſita ſit recta A B, cuius cubus ſit coefficiens ſolidum ſublaterale, & in ea ad ad partes B, in infinitum, protracta ſumantur qualeſcumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus idem ſuperatur à cubo A C, ità A C. ad ſegmentum ipſius C K, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo cubus idem ſuperatur à cubo A D, ità A D, ſegmentum ipſius D L; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A E, ita A E, ad ſegmentum ipſius E M, & vt cubus A B, ad exceſſum quo idem cubus ſuperatur à cubo A F, ità A F, ad ſegmentum ipſius F N; & vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A G, ità A G, ad ſegmentum ipſius G O, & vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A H, ita A H, ad ſegmentum ipſius H P; & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit vt cubus A B, ad exceſſum, quo idem cubus ſuperatur à cubo A C, ità A C, ad ſegmentum ipſius C K; erit conuertendo, vt huiuſmodi exceſſus, quo ſcilicet cubus A C, ſuperat cubum A B, ad cubum A B, ità ſegmentum ipſius C K, ad A C; quapropter plano-planum factum abs A C, in ſolidum, quod eſt exceſſus, quo cubus A C, ſuperat cubum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius A C, minus plano-plano ex A C, in cubum A B, æquabitur plano-plano ab ſegmento ipſius C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano ab eadem A D, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs ſegmento ipſius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, erit vt cubus A Z, minus cubo A B, ad cubum A B, ità Z Y ad A Z; atque adeò quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano ab eadem A Z, in cubum A B, æquale erit plano-plano abs Z Y, in cubum A B; & ità de reliquis; Quamobrem ſi coefficiens ſolidum ſublaterale fuerit cubus A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipſi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-planum factum ab A Z, in ſolidum, quod eſt exceſſus, quo cubus A Z, ſuperat cubum A B, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius A Z, minus plano-plano ab A Z, in cubum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum minus plano-plano ab eadem A Z, in cubum A B, æquale eſt plano-plano ab Z Y, hoc eſt B X, in cubum A B. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt A Z, cum eius quadrato-quadratum, &c.

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur eſt Geneſis lineæ decimæquartæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVINTA

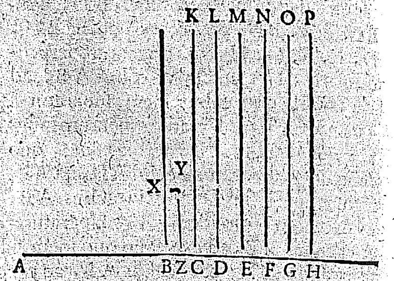
Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 - b a^3 = b^3 d.$$

Decima quinta Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani ſub cubo, dataque coefficiente longitudine.

 Sit

Sit igitur æquatio $a^4 - b a^3 = b^3 d$, *ad quam analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur, Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt* $a^3 - b a^2$ *ad* b^3, *ita d ad a.*



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo subcubica, & in ea ad partes B, in infinitum protracta, sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; fiat autem vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A C, in A B, longitudinem, superatur à cubo ipsius A C, ità A C, ad segmentum ipsius C K, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A D, in longitudinem A B, superatur à cubo ipsius A D, ità A D, ad segmentum ipsius D L, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A E, in longitudinem A B, superatur à cubo ipsius A E, ità A E, ad segmentum in E M, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A F, in longitudinem A B, superatur à cubo A F, ità A F, ad segmentum ipsius F N, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A G, in longitudinem A B, superatur à cubo A G, ità A G, ad segmentum ipsius G O, & vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A H, in longitudinem A B, superatur à cubo A H, ità A H, ad segmentum ipsius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; Hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad excessum, quo solidum à quadrato A C, in longitudinem A B, superatur à cubo A C, ità A C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo, vt huiusmodi excessus, quo cubus A C, superat solidum à quadrato A C, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C, quapropter plano-planum factum ab A C, in solidum, quod est excessus, quo cubus A C, superat solidum à quadrato A C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius A C, minus plano-plano à cubo A C, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius C K, in cubum A B, & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano à cubo A D, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, fit vt cubus A Z, minus solido à quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, ad cubum A B, ità Z Y, ad A Z, atque adeò quadrato-quadratum A Z minus plano-plano à cubo A Z, in longitudinem A B, æquale fit plano-plano ab Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens longitudo subcubica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z; plano-planum factum abs A Z, in excessum, quo cubus A Z, superat solidum à quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-quadratum eiusdem A Z, minus plano-plano à cubo ipsius A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum minus plano-plano à cubo ipsius A Z, in longitudinem A B, æquale est plano-plano abs Z Y, hoc est B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix erit A Z, cùm eius quadrato-quadratum minus, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Lineæ Decimæquintæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

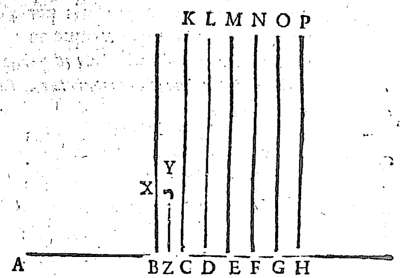
SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$a^4 - b^2 a^2 = b^3 d.$$

DEcima sexta Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-quadratum afficitur multa plano-plani sub plano, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^4 - b^2 a^2 = b^3 d$, *ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata, Geometrica effectio, dictante Porismate, comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt* $a^3 - b^2 a$ *ad* b^3, *ità d, ad a.*



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum subquadraticum, & in hac ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erectis perpendicularibus, fiat, vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità A C, ad segmentum ipsius C K; & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A D, superat solidum ab eadem A D, in quadratum A B, ità A D, ad segmentum ipsius D L; & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A E, superat solidum ab eadem A E, in quadratum A B, ità A E, ad segmentum ipsius E M, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A F, superat solidum ab eadem A F, in quadratum A B, ità A F, ad segmentum in E N, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A G, superat solidum ab eadem A G, in quadratum A B, ità A G, ad segmentum in G O, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A H, superat solidum ab eadem A H, in quadratum A B, ità A H, ad segmentum in H P, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea; hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit, vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità A C ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo vt huiusmodi excessus, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità segmentum ipsius C K, ad A C, quapropter plano-planum factum abs A C, in excessum quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, hoc est quadrato-quadratum ipsius A C, minus plano-plano à quadrato eiusdem A C, in quadratũ A B, æquabitur plano-plano abs C K, in cubum A B; & quadrato-quadratum ex A D, minus plano-plano à quadrato eiusdem A D, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs segmento ipsius D L, in cubum A B, & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est Linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y fit vt cubus A Z, minus solido ab eadem A Z, in quadratum A B; ad cubum A B, ità Z Y, ad A Z, atque adeò quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano à quadrato eiusdem A Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano abs Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis; quamobrem si subquadraticum coefficiens planum fuerit quadratum ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in cubum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X, agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto verò Y cadat perpendicularis Y Z; plano-planum factum abs A Z, in excessum, quo cubus A Z, superat solidum ab eadem A Z, in quadratum A B, hoc est quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano à quadrato eiusdem A Z, in quadratum A B, æquabitur plano-plano

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

no-plano abs ZY, hoc eſt BX, in cubum AB. Innoteſcit igitur ignota quantitas, nempè AZ, vtpotè illa, cuius quadrato-quad. minus plano-plano à quadrato eiuſdem AZ, in quadratum AB, æquale eſt plano-plano abs ZY, hoc eſt BX, in cubum AB. Propoſitæ igitur æquationis radix erit AZ, cum eius quadrato-quadratum minus plano plano &c.

Hæc igitur eſt Geneſis Lineæ Decimaſextæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad ſecundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

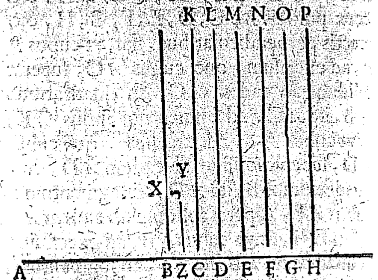
SEPTIMA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit.

$$a^5 - b^4 a = b^4 d.$$

Decima ſeptima Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad Geometricam effectionem Problematum, quibus fit ſatis per æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano-plano.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^4 a = b^4 d$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt, fit vt $a^4 - b^4$ ad b^4, ita d ad a.



Expoſita ſit quædam recta AB, cuius quadrato-quadratum eſt coefficiens plano-planum ſublaterale, & in ea ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erectis perpendicularibus; Fiat reſolutio quadrato-quadratorum in ſimplices longitudines, vt ſuo loco tradidimus, ſecundum poſitam quantitatem, & quidem quadrato-quadratum ex AC, reſolutum ſit in longitudinem α, & quadrato-quadratum AD, in longitudindem γ, quadrato-quadratum AE, in longitudinem δ, quadrato-quadratum AF, in longitudinem ε quadrato-quadratum AG, in longitudinem ξ quadrato-quadratum AH, in longitudinem η, & ſic deinceps. Quadrato-quadratum AB, reſolutum ſit in longitudinem β, deindè differentia inter α, & β, ſit μ, mox verò fiat, vt β, ad μ, ità AC, ad ſegmentum ipſius CK, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum initia ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: Hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim ſit, vt AC, ad ſegm. in CK, ità β, ad μ, ergo conuertendo erit, ſit μ, ad β, ità ſegm. in CK, ad AC, quapropter plano-ſolidum factum ab AC, in μ plano-planum, quo α ſuperat β, ſeu quadrato-quadr. AC, ſuperat quadrato-quadratum AB, hoc eſt quadrato-cubus ipſius AC, minus plano-ſolido ab eadem AC, in quadrato-quadratum ipſius AB, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius CK, in quadrato-quadratum eiuſdem AB; & quadrato-cubus ex AD, minus plano-ſolido ab eadem AD, in quadrato-quadratum AB, æquabitur plano-ſolido abs ſegmento ipſius DL, in quadrato-quadratum eiuſdem AB, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis ZY, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, erit vt quadrato-quadratum AZ, minus quadrato-quadrato AB, ad quadrato-quad. AB, ità ZY, ad AZ; atque adeò quadrato-cubus AZ, minus plano-ſolido ab eadem AZ, in quadrato-quadratum AB, æquabitur plano-ſolido abs ZY, in quadrato-quadratum AB, & ſic de reliquis. Si ergo coefficiens plano-planum ſublaterale fuerit quadrato-quad. ipſius AB, & in perpendiculari erecta ex puncto B, ſecetur BX, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum ipſius AB, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur XY, parallela ipſi AH, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis YZ; Plano-ſolidum factum

Huiuſmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ deſcriptæ, in puncto Y.

factum abs AZ, in exceſſum, quo quadrato-quadratum AZ, ſuperat quadrato-quadratum AB, hoc eſt quadrato-cubus ipſius AZ, minus plano-ſolido ab eadem AZ, in quadrato-quadratum AB, æquabitur plano-ſolido abs ZY, hoc eſt BX, in quadrato-quadratum AB. Innoteſcit igitur ignota quantitas nempè AZ, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-ſolido ab eadem in quadrato-quadratum AB, æquabitur plano-ſolido abs ZY, hoc eſt BX, in quadrato-quadratum AB. Propoſitæ igitur æquationis radix erit AZ, cùm eius quadrato-cubus minus plano-ſolido ab eadem in quadrato-quadratum AB, æqualis ſit plano-ſolido abs ZY, ſeu BX, in quadrato-quadratum AB, dato comparationis homogeneo. Propoſitæ igitur æquationis radix eſt AZ, &c.

Hæc igitur eſt Geneſis Lineæ Decimæſeptimæ ex ijs, quas adinueni, quaſque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

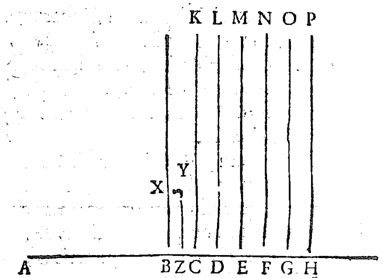
OCTAVA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 - b^3 a^2 = b^3 d^2.$$

Decima octaua Linearum Medicearum eſt, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit ſatis per æquationem in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-ſolidi ſub quadrato, datoque coefficiente ſolido.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^3 a^2 = b^3 d^2$, ad quam Analyſis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Poriſmate, comparetur. Reſoluta in analogiſmum, vt par eſt fit, vt $a^3 - b^3$ ad b^3, ita d^2 ad a^2.



Expoſita ſit recta AB, cuius cubus ſit coefficiens ſolidum ſubquadraticum, & in ea ad partes B, in infinitum protracta ſumantur qualeſcumque partes BC, BD, BE, BF, BG, BH, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, erigantur perpendiculares; fiat autem vt cubus AB, ad exceſſum, quo cubus AC, ſuperat cubum AB, ità quadratum AC, ad quadratum ſegmenti ipſius CK, & vt cubus AB, ad exceſſum, quo cubus AD, ſuperat cubum AB, ità quadratum AD, ad quadratum ſegmenti ipſius DL; & vt cubus AB, ad exceſſum, quo cubus AE, ſuperat cubum AB, ità quadratum AE, ad quadratum ſegmenti ipſius EM; & vt cubus AB, ad exceſſum, AF, ſuperat cubum AB, ità quadratum AF; ad quadratum ſegmenti ipſius FN; & vt cubus AB, ad exceſſum, quo cubus AG, ſuperat cubum AB, ità quadratum AG, ad quadratum ſegmenti ipſius GO; & vt cubus AB; ad exceſſum, quo cubus AH, ſuperat cubum AB, ità quadratum AH, ad quadratum ſegmenti ipſius HP, & ità deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum ſegmentorum, quorum extrema ſunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam Linea; hæc illa eſt, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cum enim ſit, vt cubus AB, ad exceſſum, quo cubus AC, ſuperat cubum AB, ità quadratum AC, ad quadratum ſegmenti ipſius CK, erit conuertendo, vt huiuſmodi exceſſus, quo cubus AC, ſuperat cubum AB, hoc eſt cubus AC, minus cubo AB, ad cubum AB, ità quadratum ſegmenti ipſius CK, ad quadratum AC, quapropter plano-ſolidum factum à quadrato AC, in exceſſum quo cubus AC, ſuperat cubum AB; hoc eſt quadrato-cubus ipſius AC, minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem AC, in cubum AB, æquabitur plano-ſolido à quad. ſegmenti CK, in cubum AB; & quadrato-cubus ex AD, minus plano-ſolido à quadrato eiuſdem AD, in cubum AB, æquabitur plano-ſolido à quad. ſegmenti DL, in cubum AB, & ità deinceps. Huiuſmodi igitur indolis eſt linea prædicta, vt ſi vt si ex quocumque puncto, ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens prædictæ lineæ in puncto Y, erit vt cubus A Z, minus cubo A B, ad cubum A B, ita quadratum Z Y, ad quadratum A Z; atque adeò quadrato-cubus A Z, minus plano-solido à quadrato eiusdem A Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si subquadraticum coefficiens solidum fuerit cubus ipsius A B, & in perpendiculari ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in cubum A B facit comparationis homogeneum; & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs quadrato A Z, in excessum, quo cubus A Z, superat cubum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A Z, minus plano-solido à quadrato eiusdem A Z, in cubum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-solido à quadrato eiusdem A Z, in cubum A B, æquatur plano-solido abs quadrato Z Y, hoc est quadrato B X, in cubum A B. Propositæ igitur æquationis radix est A Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis decimæ octauæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

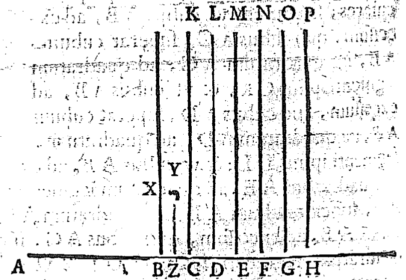
NONA

Pro effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 - b^2 a^3 = b^3 d^2.$$

DEcima noua Medicearum Linearum est, quæ facit ad Geometricam effectionem Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-solidi sub cubo, datoque coefficiente plano.

Sit igitur æquatio $a^5 - b^2 a^3 = b^3 d^2$, ad quam analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^3 - b^2 a$, ad b^3, ità d^2 ad a^2.



Exposita sit recta A B, cuius quadratum sit coefficiens planum subcubicum, & in ea ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; Fiat autem vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, ità quadratum A C, ad quadratum segmenti ipsius C K, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A D, superat solidum ab eadem A D, in quadratum A B, ità quadratum A D, ad quadratum segmenti ipsius D L, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A E, superat solidum ab eadem A E, in quadratum A B, ita quadratum A E, ad quadratum segmenti ipsius E M, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A F, superat solidum ab eadem A F, in quadratum A B, ita quadratum A F, ad quadratum segmenti ipsius F N, & vt cubus A B, excessum, quo cubus A G, superat solidum ab eadem A G, in quadratum A B, ità quadratum A G, ad quadratum segmenti ipsius A O, & vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A H, superat solidum ab eadem A H, in quadratum A B, ita quadratum A H, ad quadratum segmenti ipsius H P, & ita deinceps. Per puncta verò extrema prædictorum segmentum quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea, hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt cubus A B, ad excessum, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadra-

quadratum A B, ità quadratum A C, ad quadratum segmenti ipsius C K; erit conuertendo vt huiusmodi excessus, quo cubus A C, superat solidum ab eadem A C, in quadratum A B, hoc est cubus A C, minus solido ab eadem A C, in quadratum A B, ad cubum A B, ità quadratum segmenti ipsius C k, ad quadratum A C, quamobrem plano-solidum factum à quadrato A C, in cubum A C, minus solido ab eadem A C, in quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A C, minus plano-solido ab ipsius A C, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius C K, quadrato in cubum A B, & quadrato-cubus ex A D, minus plano-solido ab eiusdem A D, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-solido à quadrato segmento ipsius D L, in cubum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex. gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ prædictæ in puncto Y, quadrato-cubus A Z, minus plano-solido ex cubo A Z, in quadratum A B, æqualis sit plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B, & sic de reliquis. Quamobrem si coefficiens planum fuerit quadratum rectæ A B, & in perpendiculari, erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis ei cuius quadratum ductum in cubum ipsius A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallala ipsi A H, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum abs quadrato A Z, in cubum A Z, minus solido ab eadem A Z, in quadratum A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A Z, minus plano-solido ab eiusdem A Z, cubo in quadratum A B, æquabitur plano-solido abs quadrato Z Y, in cubum A B. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-solido ab eiusdem A Z, cubo in quadratum A B, æqualis est plano-solido abs Z Y, seu B X, quadrato in cubum ipsius A B. Propositæ igitur æquationis radix erit A Z, cum eius quadrato-cubus minus plano-solido &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc igitur est Genesis Decimæ nonæ Lineæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

Ad Secundum genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

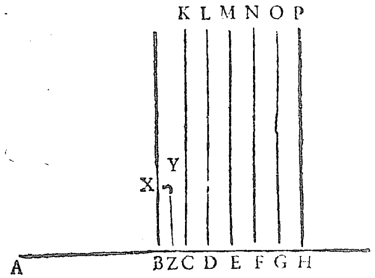
DECIMA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit

$$a^5 - b a^4 = b^4 d.$$

VIgesima Linearum Medicearum est, quæ facit ad effectionem Geometricam Problematum, quibus fit satis per æquationem, in qua Quadrato-cubus afficitur multa plano-solidi sub quadrato-quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit igitur æquatio $a^5 - b a^4 = b^4 d$, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur; Resoluta in analogismum, vt par est, fit vt $a^4 - b a^3$ ad b^4, ita d ad a.



Exposita sit recta A B, coefficiens longitudo subquadratica, in qua ad partes B, in infinitum protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; deindè quadrato-quadratum ipsius A B, resoluatur in longitudinem α, mox verò quadrato-quadratum A C, resoluatur in longitudinem β, & plano-planum sub cubo A C, & longitudine A B, resoluatur in longitudinem γ, item quadrato-quadratum A D, in longitudinem δ, & plano-planum sub A D, cubo, & longitudine A B, in longitudinem ε, & sic de reliquis. Vt autem α ad β minus γ, ità fiat A C, ad segmentum ipsius C K, & vt α ad δ, minus ε, ità fiat A D, ad segmentum in D L, & ità deinceps.

Per puncta verò extrema prædictorum segmentorum, quorum initia sunt B, C, D, &c. intelligatur ducta quædam linea: hæc illa est, quæ ad prædictam effectionem conducit; Cùm enim sit vt α, a 1 β, minus γ, ita A C, ad segmentum ipsius C K, erit conuertendo, vt β, minus γ, ad α, hoc est quadrato-quadratum A C, minus plano plano ex cubo eiusdem A C, in longitudinem A B, ad quadrato-quadratum A B, ita segmentum ipsius C K, ad A C, ob id plano-solidum factum abs A C, in excessum, quo quadrato-quadratum A C, superat plano-planum à cubo eiusdem A C, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A C, minus plano-solido à quadrato-quadrato A C, in longitudinem A B, æqualis est plano-solido abs segmento ipsius C K, in quadrato-quadratum A B, & quadrato-cubus AD, minus plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem AD, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs segmento ipsius D L, in quadrato-quadratum A B; & ità deinceps. Huiusmodi igitur Indolis est linea prædicta, vt si ex quocumque puncto ex gr. Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, sit vt quadrato-quadratum A Z, minus plano-plano abs cubo AZ, in longitudinem AB, &c. ad quadrato-quadratum A B, ita Z Y, ad A Z, quamobrem quadrato-cubus A Z, minus plano-solido à quadrato-quadrato A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B; Quamobrem si coefficiens longitudo subquadrato-quadratica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B secetur B X, æqualis rectæ, quæ ducta in quadrato-quadratum A B, facit comparationis homogeneum, & ex puncto X agatur X Y, parallela ipsi A H, occurrens lineæ iam dictæ in puncto Y, ex puncto verò Y, cadat perpendicularis Y Z, plano-solidum factum ab A Z, in excessum, quo quadrato-quadratum A Z, superat plano-planum à cubo eiusdem A Z, in longitudinem A B, hoc est quadrato-cubus ipsius A Z, minus plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, æquabitur plano-solido abs Z Y, hoc est B X, in quadrato-quadratum A B; Innotescit igitur ignota quantitas, nempè A Z, vtpotè illa, cuius quadrato-cubus minus plano-solido à quadrato-quadrato eiusdem A Z, in longitudinem A B, æquatur plano-solido abs Z Y, seu B X, in quadrato-quadratum A B, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Hæc itaque est Genesis Lineæ Vigesimæ ex ijs, quas adinueni, quasque Mediceas appello.

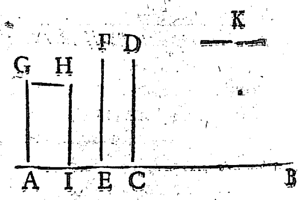
Tertium Genus Linearum MEDICEARVM, *& ad huiusmodi genus pertinentium*

PRIMA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b a - a^2 = z^2.$$

Data sit coefficiens A B, & K, possit comparationis homogeneum. Diuidatur A B, bifariam in C, & ex C, erigatur perpendicularis C D, ea lege vt sit quemadmodum A C, ad C D, ita C D, ad C B, Manifestum est rectangulum A C B, esse maximum omnium ad eandem rectam applicabilium deficientium quadrato; & defectum occupare reliquum dimidium lineæ. Itemque constat rectangulum A C B, æquale esse quadrato C D. Mox autem assumpto quouis puncto E, ex E, excitetur E F, ea lege vt sit quemadmodum A E, ad E F, ita E F, ad E B. Et sic deinceps procedatur assumptis alijs punctis in recta A B; & erectis perpendicularibus eodem modo per quarum extremitates intelligatur ducta quædam linea. Deinde ex A, excitata perpendiculari A G, quæ sit æqualis ipsi K, quæ potest comparationis homogeneum & ex G, agatur G H, parallela ipsi A B, occurrens prædictæ lineæ in H, ex H, cadat H I, perpendicularis ad A B; Dico I B, esse propositæ æquationis Radicem; est enim rectangulum A I B, æquale quadrato H I, seu K, at verò rectangulum prædictum est idem quod rectangulum A B I, minus quadrato I B; quare rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale erit K, quadrato.



Hæc

Hæc autem linea cum circuli peripheria coincidit; est enim rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale rectangulo A I B; si igitur rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale est quadrato K, & rectangulum A B I, minus quadrato I B, æquale est rectangulo A I B, ergo rectangulum A I B, æquabitur quadrato K, seu A G, seu I H; & quoniam idem contingit de omnibus rectis excitatis ex singulis punctis rectæ A B, propterea linea A D B, circuli peripheria erit.

Hoc idem intelligi potest de A I, rectangulum enim B A I, minus quadrato A I, æquale est rectangulo A I B, &c.

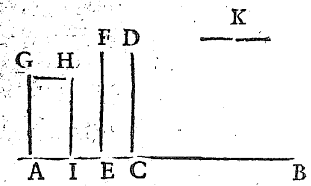
Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM,

SECVNDA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit.

$$b a^2 - a^3 = b^2 d.$$

Data sit coefficiens A B, & K, sit recta, cuius cubus æqualis sit comparationis homogeneo. Secetur autem ipsa A B, in C, ita ut A C, sit tertia pars ipsius A B. Excitetur ex C, recta quæpiam C D; ita, vt sit quemadmodum A C, ad C D, ita quadratum C D, ad quadratum C B, Manifestum est maximum solidum esse, quod applicatur alicui lineæ deficiens cubo, esse inquam id, quod tertiæ parti datæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ. Quamobrem solidum sub altitudine A C, & sub quadrato C B, omnium applicabilium ad rectam A B, defficientium cubo ex C B, erit maximum. Constat itidem solidum prædictum æquale esse cubo ex C D.



Deinde sumatur punctum E, & fiat, vt A E, ad E F, ita quadratum E F, ad quadratum E B. Non dissimiliter procedatur deinceps acceptis alijs punctis in A B, & excitatis ad eam perpendicularibus, per quarum extrema intelligatur ducta linea quædam, quæ hoc pacto descripta erit per puncta continuata. Deinde ad extremitatem A, excitetur perpendicularis A G, æqualis K, agaturque G H, parallela ipsi A B, occurrens lineæ iam descriptæ in H, & ex H, cadat H I, perpendicularis ad A B. Dico I B, esse æquationis radicem. Solidum enim sub A B, coefficiente, & quadrato I B, minus cubo eiusdem I B, hoc est solidum sub altitudinem A I, & quadrato I B, æquale est cubo I H, seu A G, hoc est K. Quod oportebat &c.

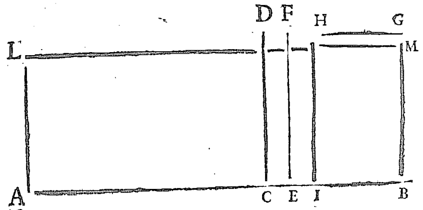
Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

TERTIA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b^2 a - a^3 = b^2 d.$$

Datum sit planum A L M B, cuius latus vnum A B, aliud B M, secetur A B, in C, vt C B, sit tertia pars totius A B, igitur vel C B, tertia pars est æqualis B M, vel in æqualis. Si fuerit inæqualis, Quandoquidem vtcunque se habeat certè segmentum C M, tertia pars est totius M A, reperiatur recta quæ possit ipsum planum C M, & ad hanc applicetur totum A M, con-



 surget

surget enim latus A B, triplum rectæ potentis C M, tertiam partem totius A M. Ex puncto C, excitetur C D, itaut sit quemadmodum L C, duæ tertiæ partes totius A M, ad quadratum C D, ita C D, ad C B. Manifestum est maximum solidum omnium applicabilium dato plano defficientium cubo, esse id, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani. Quare solidum prædictum erit maximum, nempè contentum sub plano L C, & altitudine C B.

Constat præterea cubum C D, prædicto solido æqualem esse.

Sumatur in A B, quoduis aliud punctum E, & ex E, excitetur E F, itaut quemadmodum est planum A M, minus quadrato E B, ad quadratum E F, ita sit latus E F, ad latus E B, & sic procedatur deinceps assumptis in A B, alijs punctis, & excitatis rectis perpendicularibus ad illam; per quarum extrema intelligatur ducta linea quædam, & ex B, excitetur B G, cuius cubus æqualis sit comparationis homogeneo; agatur G H, parallela ipsi A B; & ex H, cadat H I. Dico I B, esse radicem æquationis propositæ. Est enim solidum sub plano A M, minus quadrato I B, & altitudine I B, æquale cubo ex I H. At solidum prædictum idem est, quod solidum sub plano L B, & altitudine I B, minus cubo ex I B, ergo solidum sub plano L B, & altitudine I B, minus cubo ipsius I B, æquabitur cubo ex I H, seu ex B G, hoc est dato solido comparationis homogeneo.

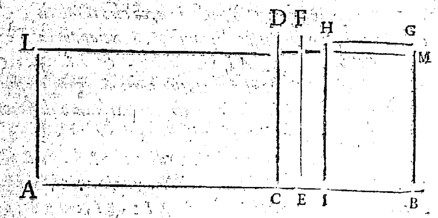
SCHOLION.

Suspicabitur quispiam, necesse esse, vt A L, æqualis sit I B. Sed immeritò, cum enim fieri debeat applicatio solidi ad planum, id non requiritur, nisi cum est inueniendum maximum solidorum applicabilium; tunc enim, punctum C est inter A B, itaut C B, debeat esse æqualis A L, seu B M; si nimirum solidum applicari debeat plano, itaut sit defficiens cubo; in reliquis punctis inter C B, id non requiritur. Quando igitur C B, tertia pars totius A B, non est æqualis B M, fieri debet æqualis, vt solidi altitudo nempè C B, cum fuerit æqualis B M, latitudini baseos, fiat cubus eiusdem altitudinis cum solido. At cum deinde nos describendo lineam sumimus puncta in linea A B, vt putà E, atque facimus vt excessus plani A M, supra quadratum E B, ad quadratum cuiusdam lineæ, nempe E F, ita hæc ipsa linea ad segmentum E B, & sic in alijs acceptis punctis deinceps in eadem linea C B, Manifestum est factum esse quod oportet; Quandoquidem supponamus factum esse excessum, quo A M, planum superat quadratum E B, ad quadratum alicuius lineæ, vt E F, ita hæc ipsa linea ad segmentum E B; atque erecta perpendiculari E F, & sic de alijs erectis à punctis in C B, per earum linearum extrema intelligatur ducta linea D F H B, ad extremum B, erecta sit perpendicularis B G, quæ sit latus cubi æqualis dato solido, ducta autem G H, parallela ipsi A B, vt occurrat mixtæ lineæ in H; ex H, cadat perpendicularis H I; Dico solidum supra planum A M, & sub altitudine I B, minus cubo eiusdem I B, æquale esse solido, cui est æqualis cubus ex B G. Quandoquidem factus est excessus plani A M, supra quadratum E B, ad quadratum lineæ E F, vt eadem linea, ad segmentum E B, & sic de omnibus alijs lineis, ductis perpendiculariter ab omnibus punctis in C B, erit vt excessus plani A M, supra quadratum I B, ad quadratum lineæ I H, ità I H, ad I B, quare ex Elementis, solidum cuius altitudo est I B, basis autem est excessus plani A M, supra quadratum I B, æquale erit cubo ex I H, seu B G, hoc est solido dato. Sed solidum cuius altitudo est I B, basis verò est excessus plani A M, supra quadratum I B, est æquale solido, cuius basis est planum A M, altitudo I B, minus cubo ex I B, ergo solidum cuius basis est planum A M, altitudo autem I B, minus cubo eiusdem I B, æquale est solido dato; Quod erat operæ pretium &c.

Illustriss. Signor mio Padron Colendiss.

Finalmente auendo fatto reflessione à quel tanto, che V. S. mi significò con la sua cortesissima del dì 15. Nouembre del 1664. in proposito di quella mia Dimostrazione Geometrica, & il tutto conferito con qualche Professore, si è concluso, che la dimostrazione non à difetto alcuno; e perche V. S. ne rimanga accertato, è necessario, ch'ella ascolti queste poche cose.

Sia



Sia dato il piano A L M B, e sia rettangolo, del cui vn lato sia A B, e l'altro B M. Segasi A B, in C; si che C B, sia terza parte di tutto l' A B.

Hor dunque ò il C B, è vguale al B M, ò è disuguale; se gli è disuguale il segmento C M, è la terza parte di tutto l' A M, si ritroui vna retta, che possi esso piano C M, & à quest a si applichi il piano tutto A M, e ne verrà vn lato, che sarà triplo della retta potente C M, terza parte di tutto l' A M. Dal punto C, s'eccitì la retta C D; di modo che sia come L C, due terze parti di tutto l' A M, al quadrato C D, così il C D, al C B. E manifesto, che il solido contenuto dalla base L C, e dall'altezza C B, è il massimo, percioche. Omnium solidorum applicabilium dato plano deficientium cubo, maximum est illud, quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani. *E questo è certissimo per esser da altri già dimostrato, e lo potrei dimostrare ancor io. Hor qui V. S. auuerta, che noi non habbiamo fatto altro, solo che fare, come l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato C B; già che L C; e il suddetto eccesso, e C B, è vguale al B M; si che C M, è quadrato, come dico il suddetto eccesso al quadrato C D, così il C D, al C B. E nel segmento C B, pigliando qualunque punto E, eccitiamo la retta E F, si che sia come l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato E B, ad E, al quadrato E F, ad F B. In oltre come l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato I B, al quadrato I H, così I H, ad I B, & in tal maniera operando con gl'altri punti della C B, sia descritta la linea mista B H F D, per i punti continuati abbiamo fatto quel, che bisognaua fare per trouar la radice della vguagliazione b pl. a -- a³ = z sol.*

E per dimostrar ciò supponga V. S. che B G, perpendicolare all' A B, sia lato di quel cubo, che è vguale à z sol. & in oltre supponga, che A M, sia b pl. e condotta la linea G H, parallela all' A B; e dal punto H, caschi la perpendicolare H I. Dico che I B, è il valore della radice è non deue I B, esser vguale al B M, ma si deue esser vguale al B M.

Già che si è fatto come l'eccesso dell' A M, sopra il quadrato I B, al quadrato I H, così I H, ad I B, ne segue, che quel solido, la cui base è il sopradetto eccesso del piano A M, sopra il quadrato I B, è l'altezza I B, sia vguale al cubo I H, cioè B G, cubo, ò pure z sol. ma il solido, la cui base A M, e l'altezza I B, meno il cubo dell' I B è vguale al solido la cui base è l'eccesso del piano A M, sopra il quadrato I B, e l'altezza è l'istessa I B, dunque il solido, la cui base A M, & l'altezza I B, meno il cubo dell' I B, sarà vguale al cubo del B G, ò vero z sol. V. S. dunque vede, che se A M, e b planum coefficiens sublaterale, & il cubo del B G, sit comparationis homogeneum, ò vero z sol. V. S. vede dico, che I B, e la radice, la quale non potrà mai esse vguale alla B M, alla quale deue esser vguale la C B, terza parte di tutta l' A B, per auere il massimo solido delli applicabili. Circa poi gl'essempij ch'ella me ne apporta per numeri &c. L'equiuoco stà che ella non fa il solido deficiente, si che il difetto sia cubo, il che facendo tornerà come dico io, e per meglio lasciarmi intendere io dissi che quando C B, non sia vguale alla B M; cioè che B M, non sia la terza parte dell' A B, bisogna farla per potere applicare il massimo solido &c.

Supponghiamo A B, esser 48, e B M, esser 4; si che la terza parte dell' A B, cioè C B, sarà 16, che è inuguale al 4. Perche dunque 4 in 16 fà 64, il cui lato è 8, la linea potente C M sarà 8. si facci per tanto 8 lato da chiamarsi B M, hora per 8 si diuida A M, che è 192, tanto facendo B M 4 in A B 48, e ne verrà quoziente 24, per lato da chiamarsi A B. Hora il massimo solido da potersi applicare al piano A M 192 deficiente con vn difetto, che sia cubo; dico che sarà quello, che è constituito sopra 128, cioè L C, supponendo B M 8, & A B 24; si che A C sia 16, il quale solido è 1024, e questo sarà il massimo solido da potersi applicare al piano 192, che sia deficiente &c. Il che potrò dimostrargielo Geometricamente, ogni volta che ella voglia. Di modo che se noi supponessimo A M, pur 192, & A B 32; si che B M, fosse 6; il solido applicato al 192, ma deficiente con vn difetto cubo sarebbe minore del 1024. Sottraggasi 6 dal 32, resterà 26, il quale si multiplichi per 6 fà 156, quale multiplicato per 6 fà 9656, ò vero si moltiplichi 192 per 6, e fà 1152, dal quale sottrattone 216, cubo del 6 riman pure 936, il che è meno del 1024, perche V. S. dice. e soggiunse per la commun altezza B M, &c. ma questi solidi che ella fa, non sono quelli, de quali noi parliamo, cioè che siano deficienti con vn difetto,

che sia

che sia cubo; di modo che non fanno al proposito.

V. S. soggiunge. Ciò posto io dico che il solido L C, in C B, non è il massimo, &c. Confesso, ch'io non intendo questo discorso V. S. ne apporta l'esempio de i numeri supponendo A B, esser 12, A C 8, C B 4, A I 10, I B 2, & L C 32; &c. dice poi, che il solido non fà il solido deficiente; Si che il difetto sia cubo. Soggiũge appresso il solido L I, in I B, sarà 80. Tutto bene, ma non sono i solidi de quali noi parliamo deficienti con vn difetto cubo.

V. S. soggiunge dicendomi.

Passo ad vn altro punto V. S. dice che L B, sia B pl. e che I B, e la radice A, che era ignota, e per conseguenza B pl. in A -- a^3 sia eguale al cubo I H, e sia l'istesso che L B, in I B -- I B, cubo. Hora facciamo i conti L B è 48, B I 2, B I, cubo 8; adunque L B, in I B -- I B cubo è 88; perche L B è 96, dal quale si leua 8 cubo di B I, il solido L I, in I B, eguale al cubo I H, dicemmo esser 80 solamente; adunque il cubo I H, che si figura z sol. e minore che L B in I B -- I B cubo; e conseguentemente minore di B pl. in A -- a^3.

V. S. mi scusi, perche sta ella sempre su gl'esempij, che non conducono al caso nostro. V. S. dice che L I in I B sarà 80, perche suppone A I 10, & I B 2. Hora si deuon fare 80 L I in I B, che L I sia 40; di modo che sendo A I 10, e necessario, che A L, sia 4, e cosi parimente B M, dourà esser 4, & eccoci fuor del caso nostro, cioè che il solido del quale V. S. parla non è applicato all'A B, ò pure ad vn piano eguale ad esso, si che sia deficiente in modo, che il difetto sia cubo, ma il difetto sarebbe vn solido sotto il piano I M, che è 8, sendo I B 2 e B M 4, e l'altezza sarebbe I B 2; che fan 16 multiplicato l'8 per 2 il qual 16, sottratto dal 96, solido sotto il piano L B, & l'altezza I B ne rimane 80, per il solido L I, in I B. Vegga dunque V. S. doue sta l'equiuoco, hor facciamo i conti à mio modo. Mentre che L B, e 48, I B 2, & B M 4, deue farsi che B M, sia pur 2; onde A B non sarà più 12 ma 24, & il piano L B, sarà pur 48, al quale applicato vn solido, che sia deficiente di vn cubo, il cui lato sia I B 2, trouerrà ella tal solido esser 88; perche sendo L B 48, mentre A B è 24, B M è 2, l'altezza I B 2, multiplicata per L B piano 48, fà 96, dal quale sottratto 8 cubo del I B resta 88, per il solido L I in I B, che è molto minore del solido L C in C B, ch'era 128 &c. Questo è quanto m'occorre, mentre per fine la riuerisco.

Pisa li 20. Aprile 1665.

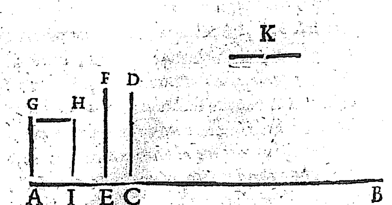
Di V. S. Illustriss.

Obligatiss. Seruitore
Carlo Renaldini.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVARTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$$b a^{3} -- a^{4} = b^{3} d.$$



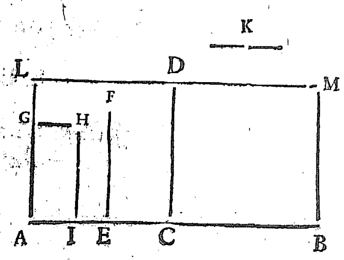
Data sit coefficiens A B, & K, sit recta cuius Quadrato-quadratum æquale sit comparationis homogeneo. Secetur A B, in C, ita vt A C, sit quarta pars totius A B. Deinde ex C, excitetur C D, itaut sit quemadmodum A C, ad C D, ita cubus C D, ad cubum C B; Manifestum est autem maximum plano-planum quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-quadrato esse id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato-quadratum, quod deficit occupare tres quartas partes datæ lineæ. Quare maximum plano-planum erit contentum sub A C, & sub cubo C B; Itemque constat plano-planum prædictum, æquale esse quadrato-quadrato ipsius C D. Sumantur deinceps alia puncta in A B, vt E, & ex E, excitetur E F, itaut quemadmodum A E, ad E F, ita cubus E F, ad cubum E B, atque adeò erectis perpendicularibus prædicta lege inuenctis ad rectam A B, per earum extremitates intelli-

gatur linea. Mox verò ex A, excitetur A G, æqualis K, agatur autem G H, parallela ipsi A D, occurrens lineæ A D B, in H, ex H, verò cadat perpendicularis H I. Dico I B, esse propositæ æquationis radicem.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

QVINTA

Pro Effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit
$$b^{2} a^{2} -- a^{4} = b^{3} d.$$

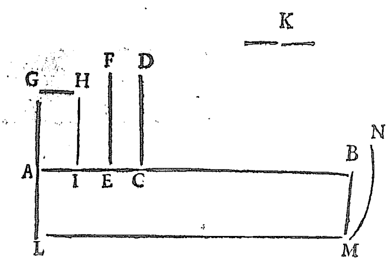


Data sit coefficiens magnitudo planum A M; at verò K, sit recta cuius plano-planum æquale sit comparationis homogeneo. Secetur A B, in C, vt A C, sit dimidium ipsius A B; atque adeò tam A C, quam C B, contineat duas quartas partes ipsius A B. Eodem modo planum ipsum diuisum erit. Vel igitur B M, æqualis est C B, vel inæqualis. Hoc autem casu constituendum est planum æquale coefficienti plano, ea lege vt latus maius duplum sit minoris vnde latus A B, duplum sit lateris B M. Ex puncto autem C, excitetur C D, ea lege, vt sit quemadmodum A C, quadratum ad C D, quadratum ita C D, quadratum ad C B, quadratum. Manifestum est autem Maximnm plano-planum omnium applicabilium dato plano deficientium quadrato-quadrato esse illud quod applicatur duabus partibus ex quatuor in quas diuiditur planum, hoc est dimidio ipsius plani. Et quadrato-quadratum, quod deficit occupare duas reliquas partes, seu reliquum dimidium; itemque constat plano-planum sub C M, & L C, æquale esse plano-plano C D. Assumpto quocunque puncto E, & erecta perpendiculari E F, ea lege, vt sit quemadmodum planũ L E, ad quad. E F, ita quad. E F, ad quadratum E B, & sic deinceps assumptis alijs punctis in A B, & per extremitates erectarum intelligatur ducta linea, mox verò ad extremum A, excitata sit perpendicularis A G, æqualis K, cuius quadrato-quadratum æquale est comparationis homogeneo. agatur G H, parallela ipsi A B, ex H, cadat H I, perpendicularis. Dico A I, esse propositæ æquationis radicem.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM.

SEXTA

Pro Effectione Geometrica, cum Æquatio fuerit
$$b^{3} a -- a^{4} = b^{3} d.$$



Planum M N, idem est quod quadratum A C

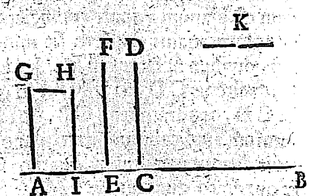
Data sit coefficiens magnitudo solidũ A B M L N; at verò recta K, sit cuius quadrato-quadratum æquale sit comparationis homogeneo. Diuidatur A B, in C, vt A C, sit quarta pars totius A B, & hunc in modum etiam solidum diuisum erit; ex C, excitetur perpendicularis C D, ea lege, vt sit quemadmodum A C, ad C D, ità cubus ex C D, ad solidum sub C B, & M N. Manifestum est autem maximum plano-planum, quod applicatur dato tur dato solido deficiens quadrato-quadrato esse id, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi, & quadrato-quadratum, quod deficit occupare reliquam quartam partem. Quare maximum plano-planum erit contentum sub A C, & solido sub C B, & M N. Itemque constat plano-planum sub A C, & solido sub C B, & M N, æquale esse plano-plano C D. Deinde assumpto quocunque alio puncto E, & ex E, excitetur E F, eadem lege, vt sit quemadmodum A E, ad E F, ita cubus E F, ad solidum sub E B, & M N, & ita deinceps procedatur assumptis alijs, alijsque punctis, & erectis perpendicularibus modo iam dicto, & per earum extremitates intelligatur ducta linea, ex A, excitetur perpendicularis A G, æqualis k, cuius plano-planum æquale est comparationis homogeneo ex G, agatur G H, parallela ipsi A B, & ex H, cadat perpendicularis H I. Dico A I, æquationis propositæ radicem esse.

Ad tertium genus pertinentium Linearum MEDICEARVM

SEPTIMA

Pro effectione Geometrica, cùm Æquatio fuerit

$$b a^4 - a^5 = b^3 d^2.$$



Data sit coefficiens magnitudo recta A B, & K, sit cuius plano-solidum, nempè quadrato-cubus æqualis sit comparationis homogeneo. Diuidatur A B, in C, vt A C, sit quinta pars totius A B, ex C, excitetur C D, ea lege, vt sit quemadmodum A C, ad C D, ita quadrato-quadratum C D, ad quadrato-quadratum C B. Manifestum est maximum plano-solidum quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-cubo esse, id quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato-cubum, qui deficit occupare reliquas quatuor ex quinque partibus datæ lineæ. Itemque constat plano-solidum sub A C, altitudine & sub quadrato-quadrato C B, æquale esse quadrato cubo ex C D. Assumatur aliquod aliud punctum E, & ex E, excitetur E F, ea lege vt sit, quemadmodum A E, ad E F, ita quadrato-quadratum E F, ad quadrato-quadratum E B, & sic deinceps procedatur assumptis alijs, alijsque punctis & erectis lineis perpendicularibus per quarum extremitates intelligatur ducta linea. Mox autem ex B, excitetur perpendicularis B G, æqualis K, cuius quadrato-cubus æqualis sit comparationis homogeneo agaturque G H, parallela ipsi A B, ex H, cadat H I. Dico I B, esse æquationis propositæ radicem.

Est enim plano-solidum sub A I, & sub quadrato-quadrato I B, æquale quadrato-cubo ex I H, at verò prædictum plano-solidum æquale est plano-solido sub A B, altitudine, & sub quadrato-quadrato I B, minus quadrato-cubo ipsius I B. Quare plano-solidum sub A B, & quadrato-quadrato I B, minus quadrato-cubo eiusdem I B, æquale erit quadrato-cubo ipsius I H, seu B G, hoc est datæ rectæ K.

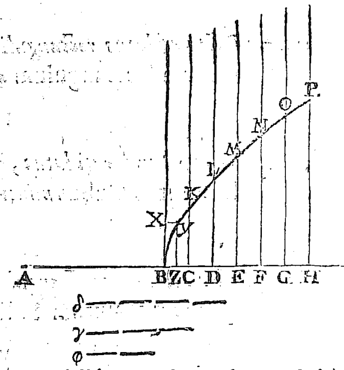
ALIVD

ALIVD QVODDAM GENVS MEDICEARVM LINEARVM Pro effectionibus Geometricis, cùm Æquatio fuerit multiplicis affectionis.

AD hoc Linearum genus pertinent Lineæ inseruientes effectionibus Geometricis pro æquationibus, in quibus Potestas est multipliciter affecta, vt si fuerit

$$a^4 + 2 b a^3 + b^2 a^2 - d^2 a^2 - 2 d^2 g a = d g^2 + d^2 f$$

Si igitur fuerit æquatio huiusmodi, ad quam Analysis conduxit, vt ea explicata Geometrica effectio dictante Porismate comparetur. Resolutta in analogismum, vt par est, fiet vt $a^3 + 2 b a^2 + b^2 a - d^2 a - 2 d^2 g$, *ad* $d g^2 + d f$, *ità* d, *ad* a:



Exposita sit recta A B, quæ sit coefficiens longitudo subcubica, eiusque quadratum, minus quadrato δ, sit coefficiens planum subquadraticū, & aliæ etiam magnitudines γ, & φ expositæ sint; deinde ipsa A B, protrahatur ad partes B, in infinitum, & in ipsa quidem protracta sumantur qualescumque partes B C, B D, B E, B F, B G, B H, &c. & ex punctis B, C, D, E, F, G, H, &c. erigantur perpendiculares; mox verò fiat vt solidum ex δ, in quadratum γ vnà cum solido ex eadem δ, in quadratum φ, ad cubum B C, vnà cum duplo solido ex quadrato B C, in A B, plus solido ex B C, in quadratum A B, minus solido ex B C, in quadratum δ, minus duplo solido ex γ, in quadratum δ, ità B C, ad C K, & eodem modo comparentur rectæ D L, E M, F N, G O, H P, &c. Iisdem adhibitis magnitudinibus datis, vnà cum B C, B D, B E, B F, B G, B H, & ita deinceps. Per puncta verò B, K, L, M, N, O, P, &c. intelligatur ducta quædam linea, nam hæc ipsa erit, quæ ad effectionem prædictam cōducit; Cùm enim factū sit vt diximus erit etiam conuertendo vt cubus B C, vnà cum duplo solido ex quadrato B C, in A B, plus &c. ad solidum ex δ in quadratum γ, plus solido ex eadem δ in quadratum φ, ita C K, ad B C. Huiusmodi igitur indolis est linea transiens per puncta B, K, L, M, N, O, P, vt si ex quocumque puncto, exempli gratia Z, erigatur quædam perpendicularis Z Y, eadem sit ratio iam dicta solidi ad solidum, quæ est Z Y, ad B Z; Quamobrem si coefficiens magnitudo subcubica fuerit A B, & in perpendiculari erecta ex puncto B, secetur B X, æqualis rectæ, cuius quadratum ductum in γ^2 plus φ^2, faciat comparationis homogeneum; & ex puncto verò X, ducatur X Y, parallela ipsi A H, ex puncto autem Y, cadat perpendicularis Y Z, cubus B Z, vnà cum duplo solido ex quadrato B Z, in A B, plus &c. ad solidum ex δ in γ^2, vna cum solido ex δ in φ^2, ita Z Y, ad B Z, ac propterea consurget æquatio, in qua B Z, quadrato-quadratum, plus duplo plano-plano ex cubo B Z, in A B, vna cum plano-plano ex B Z, quadrato in A B, quadratum, minus plano-plano ex B Z, quadrato in δ, quadratum, minus duplo plano-plano ex δ, quadrato in rectangulum sub B Z; & γ, æquabitur plano-plano ex quadrato δ in γ, quadratum, vnà cum plano-plano ex δ, quadrato in φ quadratum. Innotescit igitur ignota quantitas, nempè B Z, vtpotè illa, cuius quadrato-quadratum vna cum duplo plano-plano &c. æquatur plano-plano ex δ quadrato in γ quadratum, plus plano-plano ex eadem δ quadrato in φ, quadratum. Propositæ igitur æquationis radix erit B Z, &c.

Huiusmodi linea parallela intelligitur occurrere lineæ mixtæ descriptæ, in puncto Y.

Sic & aliæ plurimæ lineæ inueniri excogitarique possunt, quæ dificilimis Effectionibus inseruient. Sed prædictarum Linearum naturam diligentiùs persequi huius loci non est, alibi tamen de ipsis fortassis verba redibunt.

F DE-

DEFINITIONES.

I.

Posita *Quantitas, vt initio quoque definita fuit, est illa, quæ ad libitum sumitur ad communem mensuram eiusdem generis, & quæ ab vnitate denominatur.*

II.

Si fiat, vt Posita ad quadrati latus, ita hoc ad aliud, quæ prouenit longitudo, Resolutum Quadratum, *dicatur.*

III.

Si fiat, vt Posita ad latus rectanguli, ita latus alterum ad aliud, quæ prouenit longitudo, Resolutum Rectangulum *appelletur.*

IV.

Si fiat, vt Posita ad quadrati latus, ita quadratum resolutum ad aliud, quæ prouenit longitudo Resolutus Cubus *nuncupetur.*

V.

Si fiat, vt Posita ad vnius rectanguli latus, ita resolutum rectangulum ad aliud, quæ prouenit longitudo Resolutum Solidum, *vocetur.*

VI.

Si fiat, vt Posita ad quadratum resolutum, ita hoc ad aliud, quæ prouenit longitudo Quadrato-quadratum Resolutum, *dicatur.*

VII.

Si fiat, vt Posita ad rectangulum resolutum, ita hoc ad aliud, quæ prouenit longitudo Plano-planum Resolutum, *appelletur.*

VIII.

Resolutio Planorum in longitudines, Prima Resolutio, *dicitur.*

IX.

Solidorum autem, Secunda;

X.

Plano-planorum, Tertia; *& sic deinceps.*

XI.

Longitudines, in quas factæ sunt commemoratæ resolutiones, Æquipollentes Magnitudines, *dicantur.*

XII.

Quæ inter Plana, vel inter solida, vel inter Plano-plana &c. Fit comparatio Originaria dicatur Ratio.

XIII.

Quæ inter Plana, vel inter solida, vel inter Plano-plana &c. modo iam dicto resoluta, fit comparatio, Æquipollens Ratio, *vocetur.*

XIV.

Cùm per Analyseos vestigia regredimur, solidis, si quæ in ea extiterunt, ad synthesin, non nisi resolutis adscitis, est Regressus per Æquipollentia.

XV.

Analogismus omnis, quo in resoluendo vtimur, Analyticus, *dicatur.*

XVI.

In omni quidem Analytico Analogismo ad æqualitatem reuocato facto Parabolismo, cum opus fuerit, in explicanda æquatione quantitas, ad quam facta est omnium applicatio, non amplius adhibetur; hæc proindè, quæ alioquin Metiens dicebatur, quæque ad sinthesin adsciscitur, Reassumpta, *vocetur.*

XVII.

Transitus, quem facit Analysta, a resolutis Planis ad resoluta solida, Plano-plana &c. longitudinibus constanter inhærescens, Transistentia, *nuncupetur.*

XVIII.

Cùm verò ex æqualitate longitudinum inquiritur in ijsdem longitudinibus æquipollens proportio ei, quæ initio inquirenda aßumebatur, hæc Ratio symbolica, *vocetur, sic de æqualitate &c.*

XIX.

Cum autem ex proportione longitudinum per Reassumptam, fit gradatio ad eam, de qua quæritur, proportio, huiusmodi gradatio, Redintegratio, *nuncupetur. Sic de æqualitate.*

XX.

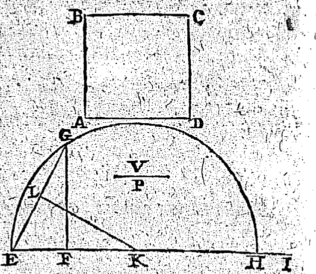
Et Proportio illa de qua quærebatur, quæque tandem adinuenta est, Redintegrata *appelletur.*

DE VNITATIS VSV IN GEOMETRIA

QVanti referat vnitatem in Geometriam inuexisse, facilè cuilibet erit depræhendere, si non nihil aduerterit difficultatem infinitorum propemodum in hac Arte Problematum, vnitatis vsu nullam reddi posse; Cùm enim quispiam instituta Analysi, synthesin aggreditur, si illa ad solida, vel plano-plana, &c. ascenderit, haud exiguis difficultatibus laborabit, quod etiam superiùs innuimus. Sibi tamen stratam reddi viam ad componendum per regressum Analyseos conspiciet, dum vnitatis beneficio, plana, solida, plano-plana, &c. in simplices longitudines transmutauerit; sic enim sibi licebit Analyseos vestigia repetere, ac propterea demonstrationem contexere; adeò vt non minus ei, quidem futura sit obuia Synthesis, quàm Analysis. Qua verò Arte hæc sit instituenda Resolutio, paucis explicabimus. Vnitatis vsus in Geometria magnifaciendus.

PROPOSITIO I.

Quo pacto planum vnitatis præsidio in simplicem longitudinem transmutetur.

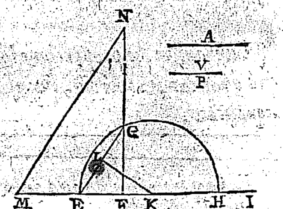


Propositum sit rectangulum A B C D, nihil autem refert, quod oblatum rectangulum sit quadratum, vel altera parte longius, tum quia solùm id discriminis est, quod in analogismo, cùm fuerit altera parte longius, non fit eiusdem lateris repetitio; vnde ille contingit in quatuor terminis non sic cùm fuerit quadratum; tunc enim in tribus terminis accidit analogismus, tùm quia rectangulum ad quadratum facilè reuocari potest: facta igitur sit hypothesis de rectangulo A B C D; vnitas autem sit V, recta quædam linea ad libitum, quæ Posita dicitur. Fiat igitur vt V, ad A B, ita A D; (& si fuerit quadratum, ita eadem A B) ad aliam; hæc enim proposito satisfaciet; nam in illam propositum rectangulum resolutum dicetur, & quidem si rectangulum A B C D, fuerit quadratum, ea resolutum quadratum appellabitur, quod si fuerit altera parte longius, resolutum rectangulum dicetur.

Sit autem quadratum, & disponatur recta quædam E I, longitudinis quantum sufficit ex qua abscindatur E F; æqualis ipsi V; ex puncto verò F, excitetur perpendicularis FG, æqualis A B, lateri prædicti quadrati; ducatur E G, quæ bifariam secetur in L, ex L, ducatur recta faciens cum E G, rectos angulos, eaque necessariò occurret ipsi E I; sitque L K, occurrens in K. Centro K, interuallo K E, describatur semicirculus, qui necessariò transibit per G, secans E I, in H. Manifestum est F H, esse rectam quæsitam; hæc enim ducta in E F, seu V, faciet rectangulum æquale quadrato G F, atque adeò proposito quadrato A B C D; cùmque E F, rationem habeat vnitatis, propterea F H, vt longitudo se habebit.

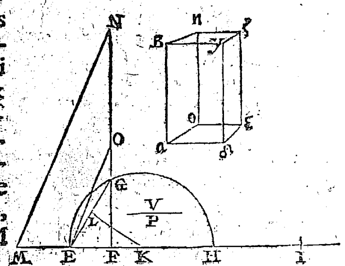
PROPOSITIO II.

Solidum, vnitatis præsidio, in simplicem longitudinem transmutare.



In solidis verò sic procedendum. Sit parallelepipedum (nihil autem refert, vtrum sit cubus, an non) si enim cubus non fuerit, longior est operatio; præstat ob id illud ad cubum reuocare. Esto igitur cubus, cuius latus A; sit autem vnitas V, quæ posita dicitur, & fiat, vt hæc ad latus A, ità latus A, ad aliud; proinde disponatur recta quædam E I, ex qua subtrahatur E F, æqualis positæ V; deinde ex F, erigatur perpendicularis F G, ipsi E I, æqualis tamen lateri dati cubi, nempe A; mox verò ducatur E G, quæ bifariam secetur in L, & ex L, agatur ipsi E G, perpendicularis L K, quæ ipsi E I, necessariò occurret, vt constat ex Elementis; occurrat autem in K; centro K, interuallo K E, describatur semicirculus, qui necessariò transibit per G; & secet E I, in H. Deinde protrahatur F E, ad partes E in M, vt M F, sit æqualis F H; ex M, agatur M N, parallela ipsi E G, occurrens F G, protractæ in N; erit F N, longitudo proposito satisfaciens. Quia semper tamen ferè contingit, vt in resolutionibus solida sint parallepipeda, vel sola, vel cubis admixta; illa autem ad cubos reuocare non exigui laboris sit, cùm inter duas rectas oporteat duas medias in continua ratione adinuenire; iuuat propterea statim ipsa parallelep peda in longitudines resoluere, vel quod idem est, præcauere, ne in illa incidatur; quoniam verò parallelepipedum potest in duplici esse discrimine, vel ita vt basis ipsius quadratum sit, vel sit rectangulum, sed nòn quadratum. Sit igitur parallelepipedum $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \theta$. cuius basis $\alpha \theta \epsilon \delta$. si hæc fuerit rectangulum, sed non quadratum, ad quadratum redigatur,

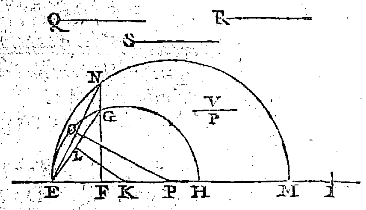
Exponatur



Exponatur igitur recta quædam E I, in qua secetur E F, æqualis V, positæ quantitati, quæ vnitas dicitur; ex F, erigatur perpendicularis F G, æqualis rectæ, quæ est latus baseos ipsius parallelepipedi vt $\alpha \delta$; agatur E G, quæ secetur bifariam in L; & ex L, ad rectos angulos ducatur L K; mox verò centro K, interuallo K E, describatur semicirculus, cuius peripheria secet E I, in H; mox verò fiat F O, æqualis altitudini ipsius parallelepipedi, vt $\alpha \beta$; deinde ducatur E O; Modo protrahatur H E, ad partes E, in M, ita vt M F, sit æqualis F H, agatur autem M N parallela ipsi E O, donec occurrat F O, protractæ in N, erit F N, recta proposito satisfaciens.

PROPOSITIO III.

Plano-planum in simplicem longitudinem transmutare.



In plano-planis ita procedendum; & primo quidem plano-planum, de quo loquimur sit quadrato-quadratum, vt $s^2 s^2$. Fiat igitur vt posita ad s, ita s, ad r, & vt posita ad r, ita r, ad q.

Disponatur itaque quædam recta E I, ex qua auferatur E F, æqualis positæ V; deinde ex puncto F, excitetur perpendicularis F G, æqualis S: mox verò ducatur E G, eaq; bissecetur in L; ex L, ei fiat perpendicularis L K, quæ necessariò occurret ipsi E I: occurrat autem in K; & centro K, interuallo k E, describatur semicirculus, qui necessariò per G, transibit; hic verò secet rectam E I, in H; mox protrahatur F G, ad partes G, & fiat F N, æqualis F H; ducatur E N, quæ bissecetur in O: ex O, eidem E N, constituatur perpendicularis O P; centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, qui necessariò transibit per N, & secet E I, in M, erit F M, recta proposito satisfaciens.

Quia tamen in resolutionibus semper ferè contingit, vt plano-plana sint, vel sola, vel quadrato-quadratis admixta; propterea iuuabit statim ipsa plano-plana in longitudines resoluere, vel quod idem est præcauere, nè in illa incidatur.

Aut igitur plano-planum sit ex ductu duorum quadratorum æqualium, atque tunc est quadrato-quadratum, de quo hactenus disseruimus; vel sit ex ductu duorum quadratorum inæqualium, vel duorum rectangulorum, siue æqualium, siue inæqualium, vel rectanguli, & quadrati.

Si constat duobus quadratis inæqualibus vt $b^2 c^2$, & instituenda sit resolutio, fiat vt vnitas, siue posita ad b, ita b, ad aliam d, deinde vt vnitas ad c, ita c, ad aliam f; mox vt vnitas ad d, ita f, ad g; atque hunc in modum longitudo g, proposito satisfacit; est enim illa, in quam plano-planum prædictum intelligitur resolutum.

Si verò constet duobus rectangulis, siue æqualibus, siue inæqualibus suo modo procedendum.

Et ex hactenus dictis liquidò constat quid agendum in Plano-solidis, Solido-solidis, &c.

Quæ hactenus tradita sunt exemplis illustrantur.

PROBLEMA.

Datum sit latus 12. diuidendum in duas partes, vt rectangulum sub partibus, æquale sit dato plano.

Datum sit latus 12. diuidendum in duas partes, vt factum sub ipsis æquale sit 32.

Pars vna esto 1 R, alia erit 12 -- 1 R productum sub his est 12 R -- 1 Q, & hoc æquale

esse

esse debet 32. Dimidium longitudinis coefficientis sublateralis, seu numeri radicum est 6. cuius quadratum est 36; a quo si auferatur 32, remanebit 4; cuius latus quadratum est 2; quo dempto ex 6, dimidio iam dicto, fit residuum 4: pro parte minori, vnde maior non latebit, subtracta scilicet, minori ex toto latere diuidendo 12. Hinc,

PORISMA.

Sume dimidium numeri radicum, & ab eius quadrato aufer comparationis homogeneum, siue numerum absolutum, residui latus quadratum subtrahe ex dimidio iam dicto; quod remanet erit pars minor.

Speciebus autem sic.

Resolutio speciosa,

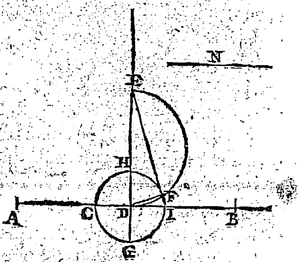
Latus diuidendum esto b, homogeneum comparationis sit z planum, Pars vna esto a; alia erit b -- a; productum ex his est b a -- a^2 quod æquabitur z plano. Dimidium coefficientis longitudinis sublateralis est $\frac{1}{2}$ b; huius quadratum est $\frac{1}{4}$ b^2 à quo si auferatur z planum; fiet residuum $\frac{1}{4}$ b^2 -- z plano, cuius latus quadratum est ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 -- z plano) à quo si auferatur $\frac{1}{2}$ b; fiet residuum ℞ ($\frac{1}{4}$ b^2 -- z pl.) -- $\frac{1}{2}$ b. pro parte minori, Maior autem non latebit. Hinc,

PORISMA.

Sumatur dimidium coefficientis longitudinis sublateralis, & ab eius quadrato auferatur homogeneum comparationis, residui autem latus quadratum auferatur ex prædicto dimidio, quod enim superest erit pars minor quæsita.

Data sit recta A B, diuidenda in duas partes, ita vt rectangulum sub ipsis, æquale sit quadrato N.

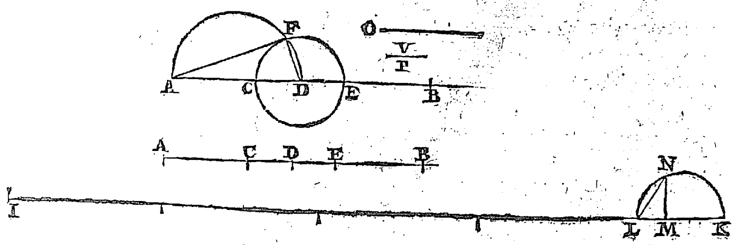
Diuidatur A B, bifariam in D, & ex D, excitetur perpendicularis D E, æqualis ipsi A D; at verò super D E, describatur semicirculus E F D, in quo aptetur E F æqualis N: ducaturque D F; centro autem D, interuallo D F, describatur circulus secans A B in C, & I. Dico esse A C, partem minorem; itaut rectangulum A C B, æquale sit quadrato ex N. Protrahatur E D, vsque ad peripheriam in G.



Quoniam igitur D E, est æqualis A D, & G D, æqualis D I; erit A I, æqualis G E; & quia D H, est æqualis C D; æqualibus existentibus D E, A D; proinde residuum H E, æquabitur residuo A C; ergo rectangulum G E H; æquabitur rectangulo I A C; sed rectangulum G E H; æquale est quadrato E F; ergo rectangulum I A C; æquabitur quadrato E F; sed rectangulum I A C; est æquale rectangulo A C B; cum eadem sit A C, in vtraque & A I, sit æqualis C B; est enim A D, æqualis D B; atque C D, æqualis D I, propterea A I, erit æqualis C B; ergo rectangulum A C B; æquale erit quadrato E F, sed E F, facta est æqualis N; ergo rectangulum A C B, æquale erit quadrato N. Quod erat faciendum.

Data sit recta A B, ita diuidenda, vt rectangulum sub partibus æquale sit dato plano, nempe quadrato ex O.

Ad vsum Vnitatis vti possemus superiori effectione, ac demostratione Geometrica, lubet tamen idem aliter absoluere.

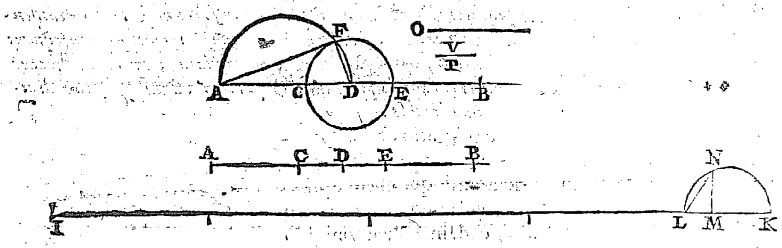


Secetur

Secetur A B, bifariam in D, & super alterutrum dimidium puta A D describatur semicirculus A F D, in quo aptetur recta A F, æqualis datæ rectæ O; mox autem agatur F D, & centro D, ad interuallum D F, describatur circulus C F E. Dico alterutrum punctorum C, E, puta C, satisfacere, ita vt rectangulum A C B, æquale sit quadrato datæ rectæ O.

Quoniam enim A D, æqualis est D B, ex constructione; & C D, æqualis est D E, erit A C, æqualis E B, addita communi C E, fiet A E, æqualis C B, quare rectangulum sub A C, & C B, æquabitur rectangulo sub A C, & A E, sed rectangulum sub A C, & A E, æquale est quadrato ipsius A F, ergo rectangulum sub A C, & C B, æquabitur quadrato eiusdem A F; sed quadratum rectæ A F, æquale est quadrato ipsius O; cum A F, facta sit æqualis ipsi O; propterea rectangulum sub A C, & C B, æquabitur quadrato datæ rectæ O.

Adscita autem vnitate in Geometria procedendum est hunc in modum. Sumatur recta quædam V, quæ posita dicetur, vnitatis munere fungens, in ordine autem ad hanc omnia tractentur conceptis magnitudinibus, seu quantitatibus cuiuslibet generis per modum longitudinum. Fiat igitur vt V, ad A D; ita A D, ad aliam quæ sit I K; Manifestum est rectangulum sub V, & I K, æquale esse quadrato ipsius A D. Deinde fiat vt V, ad O, ita O, ad aliam quæ sit I L; Manifestum est etiam rectangulum sub V, & I L, æquale esse quadrato ipsius O; ac proinde æquale esse quadrato rectæ A F Secetur L M, æqualis V. Quoniam verò duo sunt rectangula, quorum vnum sub I K, & L M, aliud verò sub I L, & eadem L M, continetur ob communem autem eorum altitudinem L M, si minus de maiori subtrahatur, quod remanet erit rectangulum sub L K, & L M; super L K, describatur semicirculus LNK, & ex puncto M, excitetur perpendicularis M N, agaturque LN; hæc vtique poterit rectangulum K L M, residuum iam dictum; vt itaque rectangulum sub I K, & L M, æquale est quadrato A D, & rectangulum sub I L, & L M, æquale est quadrato rectæ O, seu A F, ita quadratum L N, nempe excessus, quo rectangulum sub I K, & L M. superat rectangulum sub I L, & L M, æquabitur quadrato D F, quo quadratum A D, superat quadratum A F. Si igitur fiat C D, æqualis D F, circulo descripto C F E, erit C D, æqualis L N.



Intelligatur A B, bifariam diuisa in D, & facta sit C D, ipsi quidem L N, æqualis. Quoniam igitur rectangulum sub I K, & L M, æquale est quadrato A D, vt vidimus ergo rectangulum sub I K, & L M, minus rectangulo K L M, æquabitur quadrato A D, minus rectangulo K L M, sed rectangulum K L M, æquale est quadrato L N, ergo rectangulum sub I K, & L M, minus quadrato L N, æquabitur quadrato A D, minus quadrato L N, sed quadratum C D, est æquale quadrato L N, siquidem fecimus C D, æqualem L N, ergo rectangulum sub I K, & L M, minus quadrato L N, æquabitur quadrato A D, minus quadrato C D; sed rectangulum sub I K, & L M, minus quadrato L N; (hoc enim quadratum idem est quod rectangulum K L M), æquale est rectangulo sub I L, & L M, quadratum verò ex A D, minus quadrato C D, idem est quod rectangulum C A E, cum C E, sit in D, bifariam diuisa, & ei addita sit A C, ergo rectangulum sub I L, & L M, æquabitur rectangulo CAE, sed rectangulum CAE, est æquale rectangulo A C B, ergo rectangulum sub I L, & L M, æquabitur rectangulo A C B; sed rectangulum sub I L, & L M, æquale est quadrato ex O, quandoquidem fecimus, vt V, ad O, ita O, ad aliam puta I L, atque L M, fecimus æquale ipsi V, ergo rectangulum A C B, æquabitur quadrato ex O. Quod faciendum erat.

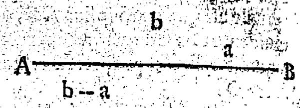
Vnitatis

Vnitatis vsum hucusque explicuimus, nunc tamen non est opus huiusmodi industria, siquidem in superiori Problematis analysi nullus est factus ascensus ad solida, modo resolutionem afferemus Problematis, in quo huiusmodi ascensus contingit; Propositum itaque sit,

PROBLEMA.

Datum latus ita diuidere, vt Quadratum vnius partis ad rectangulum sub toto, & altera parte datam habeat rationem.

Datum sit latus A B, sic in duas partes diuidendum, vt quadratum vnius partis ad rectangulum sub toto, & altera parte rationem habeat, vt R ad S.



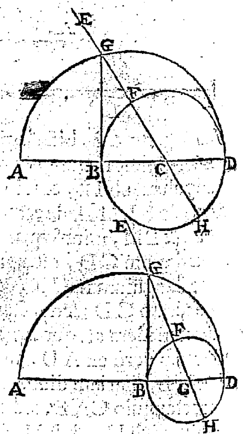
Resolutio numerosa. Numeris hunc in modum Propositum sit latus diuidendum 12, ità vt quadratum vnius partis, ad rectangulum sub tota altera parte rationem habeat, vt 4 ad 3; pars vna esto 1 R, alia erit $12 - 1R$, quadratum ipsius 1 R est 1 Q, rectangulum sub toto, & altera parte est $144R - 12R$, est vt 4 ad 3, ita 1 Q, ad $144 - 12R$, ergo fiet æquatio $3Q = 576 - 48R$, & per antithesin $3Q + 48R = 576$ fiet facto parabolismo $1Q + 16R = 192$, cuius æquationis radix est 8 hinc Canon &c.

Resolutio speciosa. Latus ipsum esto b, & pars vna sit a, altera igitur erit $b - a$, quadratum partis, quæ ponitur a est a^2, rectangulum autem sub toto, & altera parte, quæ erat $b - a$, est $b^2 - ba$, vt autem est r ad s, ità debet esse a^2 ad $b^2 - ba$, facilioris verò resolutionis gratia fiat vt s ad r, ità b ad aliam putà d, propterea erit analogismus, vt d ad b, ità a^2 ad $b^2 - ba$, vndè fiet æquatio multiplicatis extremis, & medijs, eaque erit $db^2 - dba = ba^2$, & per antithesin fiet $ba^2 + dba = db^2$, omnibus autē applicatis ad b & $a^2 + da = db$. Dimidium coefficientis sublateralis d, est $\frac{1}{2}d$ cuius quadratum est $\frac{1}{4}d^2$, cui addito db fit $\frac{1}{4}d^2 + db$, cuius latus quadratum est $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + db)} - \frac{1}{2}d$; Hinc,

PORISMA.

Quadrato dimidiæ coefficientis sublateralis addatur rectangulum factum à latere diuidendo in illud, ad quod latus diuidendum in eadem est ratione, in qua est terminus consequens rationis datæ ad terminum antecedentem, aggregati verò sumatur latus, & ei subducatur coefficientis dimidium, residuum enim erit radicis pretium, & partem vnam quæsitam diuidendi lateris exhibebit, reliqua verò non latebit.

Duobus modis potest contingere resolutio, vel ità vt latus diuidendum sit minus eo, ad quod est, vt terminus consequens rationis datæ ad antecedentem, idque euenit, quando ratio data est maioris ad minus, vel contra, ideò etiam duobus modis continget effectio, eadem tamen omninò contingit demonstratio.



Datum sit latus A B, diuidendum ea lege, vt quadratum vnius partis ad rectangulum sub toto, & altera parte rationem habeat vt R, ad S. Fiat vt S ad R, ità A B, ad B D, deinde super A D, describatur semicirculus A G D, diuisa autem B D, bifariam in C, centro C, interuallo alterutro C B, C D, describatur circulus, mox verò ex B, excitetur perpendicularis B G, & per G, & C, ducatur G C H, quæ protrahatur ad partes G, ita vt F E, sit æqualis A B. Dico F E, sic esse diuisam in G, vt quadratum G F, ad rectangulum F E G, rationem habeat, vt B D, ad A B; seu vt R ad S.

Quoniam enim A B, B G, B D, sunt continuè proportionales, erit vt A B, ad B D, ità quadratum A B, ad quadratum B G; sed quadrato B G, est æquale rectangulum H G F; ergo quadratum A B, ad rectangulum H G F erit, vt A B, ad B D; & conuertendo vt B D, ad A B, ità rectangulum H G F, ad quadratum A B, hoc est ad

est ad quadratum F E; quare vt H F, ad F E; (ita enim est B D, ad A B,) ità erit rectangulum H G F, ad quadratum E F; sed vt H F, ad F E, ità rectangulum H F G, ad rectangulum E F G, ob communem altitudinem F G; quare vt rectangulum H F G, ad rectangulum E F G, ità rectangulum H G F, ad quadratum E F; quoniam autem est, vt totum rectangulum H G F, ad totum quadratum E F; ità ablatum rectangulum H F G, ad ablatum rectangulum E F G, erit reliquum, putà quadratum F G (hoc enim remanet, si ex rectangulo H G F, auferatur rectangulum H F G) ad reliquum rectangulum F E G (hoc enim remanet, si ex quadrato E F, auferatur rectangulum E F G,) vt totum rectangulum H G F, ad totum quadratum E F; hoc est vt rectangulum H F G, ad rectangulum EFG; seu vt H F, ad F E; hoc est vt B D, ad A B, seu vt R, ad S, &c.

Quoniam superior resolutio, etsi procedens ad solida ascendendo, Effectionem Geometricam dictauit, cuius demonstratio satis est obuia solidis neglectis, per quæ factus erat incessus in resoluendo; at verò synthesis, analyseos vestigijs repetitis, vtpotè per solida procedens, parùm videtur ijs arridere, quibus candor Geometricus est in delitijs, quamuis habeat cum veritate commercium. Ea verò sic se habet, eadem Effectione supposita.

Quoniam B G, tangit circulum B F D, erit rectangulum H G F, æquale quadrato BG, hoc est rectangulo A B D, hoc est rectangulo E F H; sed rectangulum H G F, æquale est quadrato GF, plus rectangulo GFH; ergo quadratum G F, plus rectangulo G F H, æquabitur rectangulo EFH; omnibus ductis in AB, seu EF, ergo solidum ex AB, seu EF, in quad. GF, plus facto abs G F, in rectangulum E F H, æquabitur facto ab E F, in rectangulum E F H; hoc est abs F H, in quadratum E F; & per antithesin, quod fit ex F H, in quadratum E F, minus facto ab F H, in rectangulum E F G, æquabitur facto ex E F, in quadratum G F; reuocata æqualitate ad proportionem, fiet analogismus vt F H, ad E F, hoc est vt B D, ad A B, hoc est vt R ad S, ità quadratum G F, ad quadratum E F, minus rectangulo E F G, hoc est ad rectangulum F E G. — Compositio per solida procedens.

Eò igitur omnis industria debet Artificis tendere, vt non casu comparanda sit demonstratio Geometricæ Effectionis habitæ, analyseos præsidio, & non contexatur per solidorum comparationem, propter eam, quam diximus, obscuritatem: In cuius gratiam multa nostris lucubrationibus adinuenimus, quibus opitulantibus assequi licebit intentum; vndè repetendo analyseos vestigia, quamuis in ea factus sit assensus ad solida, licebit veluti deducto filo, incedere, solidis ipsis neglectis, atque propositum demonstrare.

Præcauendum est igitur, nè habita radicis æstimatione, atque indè comperta æqualitate inter plana, nè deindè incidatur in solida ad concludendum propositum. Id verò fit beneficio positæ quantitatis ad eum, qui sequitur modum. Cum igitur adinuentum fuerit quadratum ex G F, vnà cum rectangulo G F H, æquale esse rectangulo E F H, operæ pretium est, quantitatem aliquam ad libitum ponere, quæ vnitatis munere fungatur, quæ dicatur V; penes quam plana tractanda sunt per analogismos, vt in longitudines resoluantur, mox verò eadem positâ quantitate adhibitâ, inuehenda est in medium quantitas E F, veluti secundus terminus analogiæ; hoc enim pacto inter longitudines æqualitas retinebitur, quæ per antithesin non euanescet, atque tandem hac trasmutata in analogismum, comperiemus esse, vt F H, ad E F, ijs adhibitis, quæ præmisimus, Lemmatibus, ità quadratum G F, ad quadratum E F, minus rectangulo E F G, hoc est ad rectangulum F E G.

Fiat igitur secundùm positam quantitatem V, resolutio quadrati G F, in longitudinem K, & rectanguli G F H, in longitudinem L, demum rectanguli E F H, in longitudinem M, & erit quidem K, vnà cum L, æqualis M. Mox fiat vt eadem posita ad E F, ità K, ad N, & vt eadem posita ad E F, ità L, ad O, denique vt eadem posita ad E F, ità M, ad P, & erit quidem N, vnà cum O, æqualis P, ergo P, minus O, æquabitur N.

Resoluatur quadratum E F, in longitudinem Q, & rectangulum E F G, in longitudinem R, vtrumque secundùm eandem positam; ergo rectangulum F E G, erit Q, minus R; resolutum autem erat quadratum G F, in longitudinem K; ex ijs igitur, quæ in suprà positis Lemmatibus ostensa sunt, erit vt H F, ad F E, ità K, ad Q, minus R; hoc est ità quadratum G F, ad rectangulum F E G; Quod erat intentum.

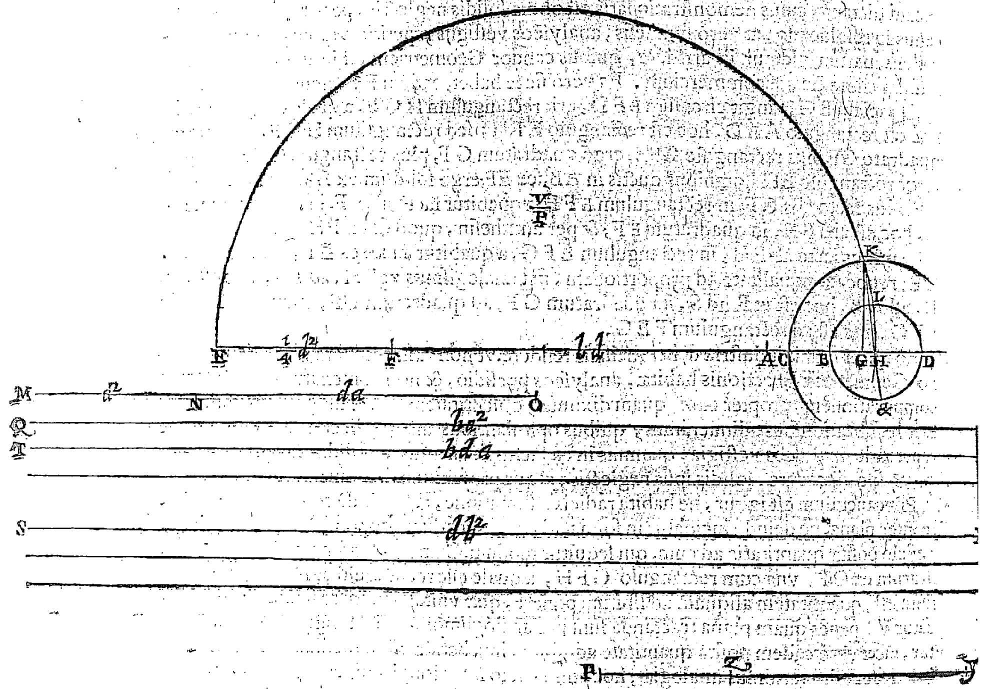
Sed vt hoc idem Problema iuxta generalem nostram componendi formam tractemus, repetitis omninò Resolutionis vestigijs, sistendo intra planorum comparationem, quamuis hæc per solida processerit, ita ratiocinandum. Et primo Effectio, quam Porisma dictat, — Generalis ratio resoluendi, quam Auctor adinuenit.

G ad eum,

ad eum, qui sequitur modum perficienda;

Recta A B, sit quæ detur diuidenda in puncto C; vt quadratum C B; ad rectangulum B A C, datam habeat rationem, quæ B D, ad B A.

Diuidatur B D, bifariam in H, sitque G H, quantitas posita; deinde fiat vt G H, ad A B, ita B D, ad F H; mox, vt G H, ad B H, ita B H, ad E F; super E H, descripto semicirculo, ex puncto G, erigatur perpendicularis G K, agaturque H K; & centro H, interuallo æquali ipsi B H, describatur arcus secans H K, in L; deinde fiat C B, æqualis K L. Dico A B, sic esse diuisam in C, vt quadratum C B, ad rectangulum B A C, sit in ratione B D, ad A B. Id porrò, vnitatis, siue positæ quantitatis beneficio, demostrabimus analyseos repetitis vestigijs, etsi analysis ad solida ascenderit; si tamen hæc præmittantur,



$AB = b = 6$	$MN = a^2 = 16$
$BD = d = 8$	$NO = da = 32$
$CB = a = 4$	$QR = ba^2 = 96$
$AC = b - a = 2$	$TV = bda = 192$
$EF = \frac{1}{4}d^2 = 16$	$SX = db^2 = 288$
$FH = bd = 48$	$PY = b^2 = 36$
$GH = o = 1$	$ZY = ba = 24$
$HL = \frac{1}{2}d = 4$	$PZ = b^2 - ba = 12$
$LK = a$	

Hoc est quadratum C B, ad rectangulum B A C, erit vt B D, ad A B. Quod oportebat efficere &c.

Quoniam rectangulum E H G, æquale est quadrato H K; sed H K est æqualis C H; ergo rectangulum E H G, æquabitur quadrato C H; sed quadrato C H, est æquale rectangulum D C B, plus quadrato B H; ergo rectangulum E H G, æquabitur rectangulo D C B, plus quadrato B H; sed rectangulum E H G, est æquale rectangulo E F in G H, plus rectan-

rectangulo F H, in G H; ergo rectangulum E F, in G H, plus rectangulo F H G, æquabitur rectangulo D C B, plus quadrato B H; sed rectangulum E F, in G H, æquale est quadrato B H (factum est enim vt G H, ad B H, ità B H, ad E F;) æqualibus propterea hinc inde sublatis, rectangulum F H G, æquabitur rectangulo D C B; sed rectangulo D C B; est æquale quadratum C B, plus rectangulo C B D; ergo quadratum C B, plus rectangulo C B D, æquabitur rectangulo F H G.

Fiat vt G H, ad C B, ità C B, ad M N, & ità B D, ad N O; nam rectangulum M N, in G H, plus rectangulo N O, in G H, æquabitur rectangulo F H G; atque adeò M N, plus N O, æquabitur F H.

Fiat rursus vt G H, ad A B, ità M N, ad Q R; ità N O, ad T V, & ità F H, ad S X. Vel, cùm fuerit factum, vt G H, ad A B, ità A B, ad P Y, fiat vt G H, ad B D, ita P Y, ad aliam, quæ erit eadem S X. Cùm enim M N, plus N O, æquaretur F H, etiam Q R, plus T V, æquabitur S X; & per antithesin S X, minus T V, æquabitur Q R.

Fiat vt G H, ad A B, ità C B, ad Z Y; vt permutando fit G H, ad C B, quemadmodum A B, ad Z Y. Superest ostendendum æqualitatem hanc ad proportionem redigi, in qua vt B D, ad A B, ita fit N O, ad Z Y.

Quoniam igitur factum est vt G H, ad A B, ita F H, ad S X; & conuertendo vt A B, ad G H, ità S X, ad F H; factum autem erat vt G H, ad B D, ità P Y, ad S X; ergo ex æquali secundum rationem perturbatam erit vt A B, ad B D, ità P Y, ad F H; ergo conuertendo vt B D, ad A B, ità F H, ad P Y, sed F H, æquatur M N, plus N O; ergo vt B D, ad A B, ita M N, plus N O, ad P Y; sed fecimus vt G H, ad C B, ita B D, ad N O, & vt G H, ad C B, ita A B, ad Z Y; ergo vt B D, ad N O, ità A B, ad Z Y; ergo vt B D, ad A B, ita N O, ad Z Y; sed erat vt tota B D, ad totam A B, ità tota M N, plus N O, ad totam P Y; nunc verò est vt tota B D, ad totam A B, sic ablata N O, ad ablatam Z Y, ergo reliqua M N, ad reliquam P Z, erit vt tota B D, ad totam A B; hoc est quadratum C B, ad rectangulum B A C, erit vt B D, ad A B.

SCHOLION.

Ex suprapositio Exemplo definitiones iam suprà allatas facillimum erit explicare. Cùm supra diceremus; fiat vt G H, ad B H, ita B H, ad E F, ipsa E F, dicitur quadratum resolutum. Deinde cùm diceremus fieri vt G H, ad C B, ita C B, ad M N, ipsa M N, erit pariter quadratum resolutum. Cùm diceremus fieri vt G H, ad C B, ita B D, ad N O, erit ipsa N O, rectangulum resolutum. Cùm diceremus fieri vt G H, ad A B, ita M N, ad Q R, erit ipsa Q R, solidum resolutum, ita etiam T V, quemadmodum S X, erunt solida resoluta. Definitiones explicantur. Quadratum resolutum. Rectangulum resolutum, &c.

Quando autem superiùs resoluimus quadratum B H, in E F longitudinem, vt quadratum C B, in longitudinem M N, & rectangulum C B D, in longitudinem N O, dicitur prior resolutio; sic quando solidum resoluimus in longitudines Q R, T V, S X, secunda dicitur resolutio. Resolutio prior. Resolutio posterior.

Resolutum est enim solidum sub altitudine A B, & quadrato C B, in longitudinem Q R, & solidum sub altitudine A B, & rectangulo C B D, in longitudinem T V, & solidum sub altitudine B D, & quadrato A B, vel sub altitudine A B, & rectangulo A B D, resolutum est in longitudinem S X. Magnitudines æquipollentes.

Supradictæ autem longitudines, in quas factæ sunt commemoratæ resolutiones, magnitudines æquipollentes dicuntur. Æqualitas autem, quæ est inter rectangulum E H G, & quadratum H K, & inter rectangulum F H G, & rectangulum D C B, originaria dicitur ratio, estque ratio æqualitatis; at verò æqualitas inter longitudines M O, & F H, & inter Q R, plus T V, & S X, æquipollens ratio nuncupatur. Ille autem regreßus, quem facimus ab æqualitate inter rectangulum F H G, & rectangulum D C B, ad æqualitatem inter M O, & F H, & inter Q R, plus T V, &c. dicitur regreßus per æquipollentia. Quando autem fecimus vt G H, ad B H, ita B H, ad E F; & vt G H, ad A B, ita B D, ad F H; & vt G H, ad C B, ita C B, ad M N, &c. Hi sunt analogismi, quos Analyticos appello. Quando verò fecimus vt G H, ad A B, ita M N, ad Q R, &c. quantitas A B, est, quæ à nobis reaßumpta dicitur; hæc enim est, ad quam omnium facta est applicatio in resolutione, in qua deinceps negligitur. Quando autem gradum fecimus à comparatione inter M O, & F H, ad comparationem inter Q R, plus T V, & S X, dicimur transistentiam fecisse. Cùm autem inferimus ex ratione, quam habet M N ad P Z, Ratio originaria. Ratio æquipollens. Regressus per æquipollentia. Analogismi Analytici. Quantitas reassumpta. Transistentia.

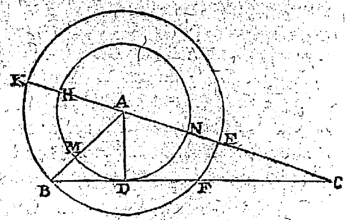
ad P Z, quæ est B D, ad A B, inserimus inquam, rationem quadrati A C, ad rectangulum B A C, esse vt B D, ad A B, hæc ratio symbolica vocatur; & tunc dicimur Redintegrationem fecisse, & ratio illa, nimirum quadrati C B, ad rectangulum B A C, vt B D, ad A B, ea est ratio, quam Redintegratam appello.

PROBLEMA.

Datis base, & perpendiculo, dataque ratione aggregati ex vno latere, & perpendiculo, ad aggregatum ex altero latere, & perpendiculo, reperire triangulum.

In triangulo A B C, data sit basis B C, 63, itidem data sit perpendicularis A D, 20, atque demum data sit ratio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari AD; ad aggregatum ex alio latere A C; & ex eadem perpendiculari A D, vt 5, ad 8, quæruntur latera.

Centro A, interuallo A D, describatur circulus; deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus describatur, & quærantur latera A B, A C. Protrahatur C A, vsque ad K. Latus A B, esto 1 R; K N, erit 1 R + 20 vt igitur 5 ad 8, ita debet esse 1 R + 20, nempè K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C; vt igitur 5, ad 8, ita 1 R + 20, ad $\frac{8 R + 160}{5}$; singula autem assequemur; propterea quod, cùm (vt iam supra dictum fuit).



Datum sit triangulum A B C, cuius basis B C 63, sit data; sit itidem data perpendicularis A D 20; sit demum data proportio &c. Supposuimus autem A B, esse 1 R; fecimus verò vt 5 ad 8, secundum datam rationem ita K N 1 R + 20, ad $\frac{8 R + 160}{5}$ pro H C; proinde si ex H C, puta $\frac{8 R + 160}{5}$ auferamus H E, nimirum 1 R + 20, remanebit $\frac{8 R + 160}{5}$ -- 1 R -- 20, pro E C; Si verò ab A E, puta 1 R, auferamus A N, nempè 20, remanebit 1 R -- 20, pro N E, atque adeo H K, erit 1 R -- 20; quamobrem si ipsi H C, nempè $\frac{8 R + 160}{5}$ addamus 1 R -- 20, fiet summa $\frac{13 R + 60}{5}$, pro KC. Vt igitur 63, ad $\frac{13 R + 60}{5}$ ita $\frac{8 R + 160}{5}$ -- 1 R -- 20, seu $\frac{3 R + 60}{5}$, ad $\frac{39 Q + 960 R + 3600}{1575}$.

Si igitur F C $\frac{39 Q + 960 R + 3600}{1575}$ subtrahatur ex 63, & remanebit pro B F $\frac{95625 - 39 Q - 960 R}{1575}$, huius dimidium est $\frac{95625 - 39 Q - 960 R}{3150}$, pro B D; huius autem quadratum est, $\frac{1521 QQ + 74880 C - 6537150 Q - 183600000 R + 9144140625}{9922500}$. Huic addatur 400, quadratum scilicet perpendicularis A D, multiplicetur itaque 400, per 9922500, fiet productum 3969000000, addendum numero 9144140625, fiet igitur numerator fractionis

1521 QQ + 74880 C -- 6537150 Q -- 183600000 R + 13113140625; ac proinde erit fractio

$\frac{1521 QQ + 74880 C - 6537150 Q - 183600000 R + 13113140625}{9922500}$ = 1 Q tollatur fractio per multiplicationem in crucem & fiet æquatio huiusmodi 1521 QQ + 74880 C -- 6537150 Q -- 183600000 R + 13113140625 = 9922500 Q; & per antithesin 1521 QQ + 74880 C -- 183600000 R + 13113140625 = 16459650 Q; & rursus per antithesin 16459650 Q + 183600000 R -- 74880 C -- 1521 QQ = 13113140625; Omnibus diuisis per 1521, fiet æquatio huiusmodi

$\frac{16459650 Q}{1521}$ + $\frac{183600000 R}{1521}$ -- $\frac{74880 C}{1521}$ -- 1 QQ = $\frac{13113140625}{1521}$, quæ per Isomœriam reuocabitur ad hanc

25035127650 Q + 424747767600000 R -- 74880 C -- 1 QQ = 461417817617334390625. Huius æquationis radix est 38025, vt patebit, qua diuisa per 1521 prodibit 25, radix prioris illius æquationis. Æquationem illam per numeros fractos rectè se habere constat. Quandoquidem multiplicato numero quadratorum per 625, quadratum ex 25, producetur numerus 10287281250, quo diuiso per 1521, prosilit in quotiente 6763498 $\frac{792}{1521}$ deinde ducto 183600000 in 25, radicis pretium fit 4590000000, quo diuiso per 1521, fit quotiens 3017751 $\frac{729}{1521}$, & est radicum pretium, quo addito ad pretium quadratorum superius habitum 6763498 $\frac{792}{1521}$, fit summa 9781250; ab hac summa subducatur 390625, numerus quadrato-quadratorum, fiet residuum 9390625, ab hoc tandem residuo, subducatur pretium cuborum, quod quidem fit ex multi-

plicatione numeri 15625, cubi ex 25, in numerum cuborum 74880, & productum 1170000000, diuidatur per 1521, orietur pretium cuborum 769230 $\frac{1170}{1521}$, & remanebit 8621394 $\frac{351}{1521}$, quantum planè fit diuidendo numerum absolutum supradictum 13113140625 per 1521.

Æquationem hanc per Isomœriam reuocari ad illam, superiorem patet, siquidem pretium quadratorum est 36198306716089781250, pretium autem radicum est, 16151033862990000000, horum summa est 52349340579079781250, à qua si subtrahatur quadrato-quadratum radicis (est enim radix huius æquationis 38025, numerus habitus per multiplicationem 25, in 1521) nempè 2090628617375390625, & remanebit 50258711961704390625, numerus absolutus totius æquationis, siue comparationis homogeneum. Radix autem hunc in modum extrahetur.

Proposita æquatio sit huiusmodi.

25035127650 Q + 424747767600000 R -- 74880 C -- 1 QQ = 461417817617334390625.

Cùm autem deprehensum fuerit radicem vniuersam pluribus singularibus lateribus, puta quinque constare, sitque eadem lex obseruanda, non secus ac si radix binomia foret; quandoquidem priora quotcunque singularia latera simul comparatione subsequentis vnius munere funguntur. Proinde fingendum est eam esse binomiam, nempè a † e; coefficiens autem sub quadrato sit b pl. coefficiens sub latere sit d sol. coefficiens sub cubo sit f. Comparationis homogeneum sit z pl. pl.

Quadratum ex a + e est a^2 + 2 a e + e^2, quo ducto in b pl. fit b pl. a^2 + 2 b pl. a e † b pl. e^2. Radix a + e ducatur in d solidum, & fiet d solidum a + d solido e; horum aggregatum est b pl. a^2 † 2 b plano a e + b plano e^2 † d solido a + d sol. e; ex hoc subtrahatur productum, quod fit ex a^3 † 3 a^2 e † 3 a e^2 + e^3; cubo nimirum ipsius a † e, in f, longitudinem. Illud autem est f a^3 † 3 f a^2 e † 3 f a e^2 † f e^3; factaque subtractione, remanebit b pl. a^2 + 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d sol. a + d sol. e -- f a^3 -- 3 f a^2 e -- 3 f a e^2 -- f e^3, ex quo etiam subtrahere oportet quadrato-quadratum eiusdem radicis & remanebit.

b pl. a^2 † 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d sol. a † d sol. e -- f a^3 -- 3 f a^2 e -- 3 f a e^2 -- f e^3 -- a^4 -- 4 a^3 e -- 6 a^2 e^2 -- 4 a e^3 -- e^4. Et hoc æquabitur z pl. pl. Comparationis homogeneo addatur a^4, & f a^3 ob notam defectus & proueniet b pl. a^2 † 2 b pl. a e † b pl. e^2 † d sol. a † d sol. e -- 3 f a^2 e -- 3 f a e^2 -- f e^3 -- 4 a^3 e -- 6 a^2 e^2 -- 4 a e^3 -- e^4 = z pl. pl. + a^4 + f a^3. Hinc autem subtrahantur b pl. a^2, & d sol. a, vt remaneat æquatio

2 b pl. a e † b pl. e^2 † d sol. e -- 3 f a^2 e -- 3 f a e^2 -- f e^3 -- 4 a^3 e -- 6 a^2 e^2 -- 4 a e^3 -- e^4 = z pl. pl. + a^4 † f a^3 -- b pl. a^2 -- d sol. a.

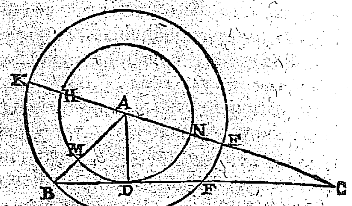
Hoc autem est illud residuum diuisisse per diuisores illos, &c. Diuisores autem sigillatim accepti sunt 2 b pl. a; b pl; d sol; 3 f a^2; 3 f a; f; 4 a^3; 6 a^2; & 4 a.

Quoniam verò quæsita radix pluribus quàm duobus singularibus lateribus constat; propterea in eligendis diuisoribus, ijsdemque proprijs sedibus collocandis, oportet cautum esse Analystam, qui in memoriam si reuocauerit, quæ iam suo loco explicuimus, nempe adhibendas esse cyphras, easque apponendas, vt ratio dictat, certe resolutionem sine errore perficeret.

Diuisione igitur instituta fiet quotiens pro secundo singulari latere.

At verò inuestigaturi tertium, vtemur duobus iam elicitis tanquam vno, & iuxta legem præscriptam operabimur. Iam enim omnis est operatio perficienda, ea ratione, vt duo priora singularia, quæ eliciuntur latera, vnius munere fungantur. Deinde procedendum omnino quemadmodum fit in singulari latere primo tractando; duo enim, vel tria, vel plura sint, nihil refert, eædem siquidem præcepta de ijs intelligenda sunt, non secus ac vnum singulare latus foret &c.

In trian-



In triangulo A B C, data sit basis B C, nempe b; itidem data sit perpendicularis A D, nimirum d; atque demum data sit proportio, quam habet aggregatum ex latere A B, & perpendiculari A D, ad aggregatum ex alio latere A C, & ex eadem perpendiculari A D, vt S, ad R, quærunttur latera. Centro A, interuallo A D, describatur circulus; deinde eodem centro A, interuallo autem A B, alter circulus describatur, & quærantur latera A B, A C. Protrahatur C A, vsque ad K. Latus A B esto a. K N, erit $a + d$; vt igitur s, ad r, ita debet esse $a + d$, nempè K N, ad aggregatum ex A D, A C, puta H C. Vt igitur s, ad r, ita $a + d$, ad $\frac{ra + rd}{s}$ singula assequemur; propterea quod cùm iam supra dictum fuerit,

Datum sit triangulum A B C, cuius basis B C. sit data b; sit itidem data perpendicularis A D, d; sit demum data proportio vt s, ad r. Supposuimus autem A B, esse a; fecimus verò vt s ad r, secundum datam rationem, ita K N, $a + d$, ad $\frac{ra + rd}{s}$ pro H C; Proinde si ex H C, puta $\frac{ra + rd}{s}$ auferamus H E, nimirum $a + d$, remanebit $\frac{ra + rd}{s} - a - d$, pro E C; Si verò ab A E, puta a, auferamus A H, nempè d, remanebit $a - d$ pro N E; atque adeo H K, erit $a - d$. Quamobrem si ipsi H C, nempe $\frac{ra + rd}{s}$ addamus $a - d$, fiet summa $\frac{ra + sa + rd - sd}{s}$ pro K C; vt igitur b, ad $\frac{ra + sa + rd - sd}{s}$ ita $\frac{ra + rd}{s} - a - d$, seu $\frac{ra - sa + rd - sd}{s}$, ad fractionem hanc nimirum.

$$\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{bs^2}$$

$$\begin{array}{r}
ra + sa + rd - sd \\
ra - sa + rd - sd \\
\hline
- srda - s^2da - srd^2 + s^2d^2 \\
+ r^2da + srda + r^2d^2 - srd^2 \\
- sra^2 - s^2a^2 - srda + s^2da \\
r^2a^2 + sra^2 + r^2da - srda \\
\hline
\end{array}$$

Hoc productum $\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{s^2}$

Diuidatur per b, fiet

Quotiens $\frac{r^2a^2 - s^2a^2 + 2r^2da - 2srda + r^2d^2 - 2srd^2 + s^2d^2}{bs^2}$. pro F C.

Quo subtracto ex b, remanebit fractio, cuius dimidium erit.

$$\frac{b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2 - r^2a^2 + s^2a^2 - 2r^2da + 2srda}{2bs^2}$$ pro BD, vel DF.

Ad Climacticum nimirum ascensum euitandum obseruetur $r^2 - s^2$, quæ cæteris notis magnitudinibus depressior est. Applicetur $2bs^2$ ad $r^2 - s^2$, hoc autem facto parabolismo proueniet nota quædam magnitudo; eaque appelletur c. Applicetur deinde plurinomium hoc. $b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2$, ad $r^2 - s^2$, & proueniet planum non ignotum g^2. Cæterum a^2 per se subsistet. Applicetur denique $2r^2d + 2srd$, ad r^2, & prouenit latus f. Itaque fractioni

$$\frac{b^2s^2 - r^2d^2 + 2srd^2 - s^2d^2 - r^2a^2 + s^2a^2 - 2r^2da - 2srda}{2bs^2}$$

Æquipollet huic $\frac{g^2 - a^2 - fa}{c}$. Huius quadratum est $\frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4}{c^2}$. Huic

$$\begin{array}{r}
g^2 - a^2 - fa \\
g^2 - a - fa \\
\hline
- g^2fa + fa^3 + f^2a^2 \\
- g^2a^2 + a^4 + fa^3 \\
g^4 - g^2a^2 - g^2fa \\
\hline
\frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4}{c^2}
\end{array}$$

addatur quadratum perpendiculi nempe d^2, & fiet,

$$\frac{a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4 + c^2d^2}{c^2}$$

Quamobrem fiet æquatio

$a^4 + 2fa^3 - 2g^2a^2 - f^2a^2 - 2g^2fa + g^4 + c^2d^2 = c^2a^2$; & per antithesin seu metathesin fiet,

$c^2a^2 +$

$c^2a^2 + 2g^2a^2 + f^2a^2 + 2g^2fa - 2fa^3 - a^4 = g^4 + c^2d^2$. Et per specierum Metamorphosin noua proueniet æquatio, eaque simplicior, & in primis explicabilis. In locum igitur $c^2 + 2g^2 + f^2$, intelligatur substitui h^2, & loco $2g^2f$ intelligatur Kl^2, & loco $2f$, subrogetur m; denique loco $g^4 + c^2d^2$, intelligatur n^4. Proueniet igitur æquatio noua minus implicata $h^2a^2 + kl^2a - ma^3 - a^4 = n^4$. Cùm autem ad hanc formam sit redacta, eaque sit huiusmodi, vt in ipsa $a^2 + a - a^3 - a^4 - n^4 = 0$; superest tantummodo, vt hæc quadrato-quadratica æquatio ad cubicam reuocetur, & ad illam in qua elatior potestas trinam dimensionem habeat, cuius inquisitum latus si non reperiatur, vt Problemati Geometricè satisfiat, ad vnam ex conicis sectionibus confugiendum erit. Sic enim quæsiti trianguli latus minus innotescet. Sin autem inuenti lateris præsidio, duabus alijs æquationibus ordinatis iuxta Artis præcepta, quod quæritur felicissimè consequemur; & vt in arenam descendamus, superiorem æquationem repetamus.

$$h^2a^2 + Kl^2a - ma^3 - a^4 - n^4 = 0$$

Huius æquationis Radix comparabitur sic

2503127650 Q + 42474776760000 R − 74880 C − 1 QQ = 4614178176133439062 5.

Secundus terminus tolletur diuidendo 74880, numerum cuborum per 4; ex ponentem maioris characteris, fit enim quotiens 18720. Itaque cum in æquatione, tàm primus, quàm secundus terminus eodem signo − afficiatur; propterea vera radix augenda est, & quidem incremento quartæ partis superiùs inuentæ.

Supponamus igitur $a - 18720$, æquari veteri, veræque radici; rursus nouæ potestates sic se habent.

$$\begin{array}{r}
a - 18720 \\
a - 18720 \\
\hline
00000 \\
37440 \\
131040 \\
149760 \\
18720 \\
\hline
- 18720\,a + 350438400 \\
a^2 - 18720\,a \\
\hline
a^2 - 37440\,a + 350438400 \\
a - 18720 \\
\hline
- 18720\,a^2 + 7008768000\,a - 6560206848000 \\
a^3 - 37440\,a^2 + 350438400\,a \\
\hline
a^3 - 56160\,a^2 + 10513152000\,a - 6560206848000 \\
a - 18720 \\
\hline
- 18720\,a^3 + 1051315200\,a^2 - 196806205440000\,a + 122807072194560000 \\
a^4 - 56160\,a^3 + 10513152000\,a^2 - 6560206848000\,a \\
\hline
a^4 - 74880\,a^3 + 2102630400\,a^2 - 262408273920000\,a + 122807072194560000
\end{array}$$

Specie-

Speciebus autem absoluetur hunc in modum

Supponamus $e - \frac{1}{4} m$ æquari a; inde potestates ortæ sunt, vt sequuntur.

$$e - \tfrac{1}{4} m$$

$$\text{Radix} \quad e - \tfrac{1}{4} m$$

$$- \tfrac{1}{4} m e + \tfrac{1}{16} m^2$$

$$e^2 - \tfrac{1}{4} m e$$

$$\text{Quadratum} \quad e^2 - \tfrac{1}{2} m e + \tfrac{1}{16} m^2$$

$$e - \tfrac{1}{4} m$$

$$- \tfrac{1}{4} m e^2 + \tfrac{1}{8} m^2 e - \tfrac{1}{64} m^3$$

$$e^3 - \tfrac{1}{2} m e^2 + \tfrac{1}{16} m^2 e$$

$$\text{Cubus} \quad e^3 - \tfrac{3}{4} m e^2 + \tfrac{3}{16} m^2 e - \tfrac{1}{16} m^3$$

$$e - \tfrac{1}{4} m$$

$$- \tfrac{1}{4} m e^3 + \tfrac{3}{4} m^2 e^2 - \tfrac{3}{64} m^3 e + \tfrac{1}{256} m^4$$

$$+ e^4 - \tfrac{3}{4} m^3 e + \tfrac{3}{16} m^2 e^2 - \tfrac{1}{64} m^3 e$$

$$\text{Quadrato-quadratum} \quad e^4 - m e^3 + \tfrac{6}{16} m^2 e^2 - \tfrac{4}{64} m^3 e + \tfrac{1}{25} m^4$$

In hac autem æquatione $h^2 a^2 + K l^2 a - m a^3 - a^4 - n^4 = o$.

Tollendus est secundus terminus iuxta Artis præcepta.

$- e^4 + m e^3 - \frac{6}{16} m^2 e^2 + \frac{4}{64} m^3 e - \frac{1}{256} m^4$	Pro $- a^4$
$- m e^3 + \frac{3}{4} m^2 e^2 - \frac{3}{16} m^3 e + \frac{1}{64}$	Pro $- m a^3$
$+ h^2 e^2 - \frac{1}{2} h^2 m e + \frac{1}{16} h^2 m^2$	Pro $+ h^2 a^2$
$+ K l^2 e - \frac{1}{4} K l^2 m$	Pro $+ K l^2 a$
$- n^4$	Pro n^4

$$\left.\begin{array}{l} \text{Seu} - e^4 * + \tfrac{3}{4} m^2 e^2 - \tfrac{3}{16} m^3 e - \tfrac{1}{256} m^4 \\ + h^2 e^2 - \tfrac{1}{2} h^2 m e - \tfrac{1}{4} K l^2 m \\ - \tfrac{6}{16} m^2 e + \tfrac{4}{64} m^3 e - n^4 \\ + K l^2 e + \tfrac{1}{16} h^2 m^2 \\ + \tfrac{1}{64} m^4 \end{array}\right\} \text{Hoc æquabitur } o.$$

Et per specierum metamorphosin rursus ordinabitur æquatio.

Nempe sumatur quæcunque longitudo pro vnitate & appelletur u; fiat autem rectangulum sub u, & p, æquale coefficienti sub quadrato, sub eiusdem vnitatis quadrato, & sub q longitudine; fiat solidum æquale coefficienti sub latere; demum sub eiusdem vnitatis cubo, & sub r longitudine fiat plano-planum æquale comparationis homogeneo; ita vt sit æquatio $e^4 * + u p e^2 - u^2 q e - u^3 r = o$. Cumque vnitas supponatur u, ea de medio sublata fiet $e^4 * + p e^2 - q e - r = o$. Seu $e^4 = * + p e^2 - q e - r$. Itaque p afficitur affirmatè q, & r negatè.

Propterea descripta sit Parabole A B C, cuius axis B D; latus autem rectum æquale assumptæ magnitudini pro vnitate, quæ sit T. Mox autem sumatur B X, æqualis dimidio ipsius T, vt punctum X, sit intra Parabolen, cuius vertex B; fiat autem X F, æqualis $\frac{1}{2}$ p. & accipiatur in B X, protracta ad partes X, cùm p, afficiatur nota †, & ex puncto F, erigatur perpendicularis F G æqualis $\frac{1}{2}$ q.

Deinde super G B, describatur semicirculus G I B, & protracta G B, ad partes B, accipiatur B L, æqualis T, lateri recto; & sumatur H B, æqualis r. Super H L, describatur semicirculus; mox accepta perpẽdiculari BK, interuallo Bk, describatur arcus KI, secans peripheriam G IB in I. Tunc centro G, ad interuallum G I, describatur circulus secans parabolen in A, S, C, ex hisce punctis ducantur ad axem perpendiculares, A Y, S V, D C.

Dico

Dico D C, esse propositæ æquationis radicem.

Quandoquidem B X, est $\frac{1}{2}$ siquidem dimidium est lateris recti, quod velut . 1 . assumpsimus, atque X F: est $\frac{1}{2}$ p; proinde cum B D, sit quadratum ipsius D C, si D C, supponatur a; certè B D, erit a^2, hoc enim est propter naturam paraboles, vt ex Elementis Conicis manifestum est; Si igitur ex B D, quam dicimus esse a^2, auferatur $\frac{1}{2}$ p, & rursus $\frac{1}{2}$ remanebit $a^2 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$. cuius quadratum est $a^4 - p a^2 - a^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$. Itaque tantum erit quadratum ex D F, siue E G. Quoniam autem D C, supponitur a . & E D, supponitur $\frac{1}{2}$ q: tota E C, erit $a + \frac{1}{2} q$, cuius quadratum est $a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2$. horum autem quadratorum aggregatum erit $a^4 - p a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$, tantumque erit quadratum ex G C, atque adeo eius latus quadratum erit ipsa G C.

Hoc Problema iam pridem ab Auctore propositũ fuit resoluendum Ismali Bullialdo Mathematico Celeberrimo, Ipse verò in vno casu solutionẽ attulit.

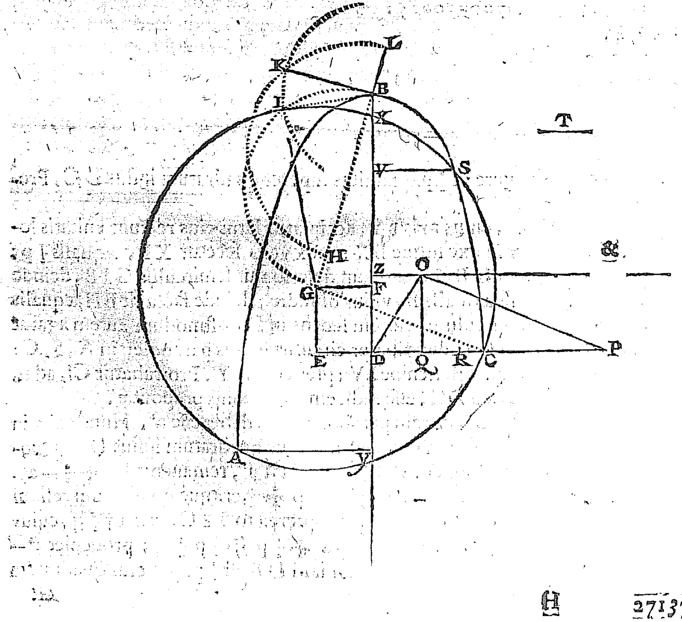
Quoniam autem H B, est r; factaque est B L, æqualis lateri recto quod est . 1 . estque B K, media proportionalis inter H B, & B L, propterea B K, erit ℞ r. & B K . quadratum erit r; est autem I B, æqualis B K; proinde quadratum I B, erit r. Quoniam verò B F; est $\frac{1}{2}$ p $+ \frac{1}{2}$. & G F . est $\frac{1}{2}$ q: horum quadrata si simul addantur, faciunt $\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$. tantumque erit quadratum ex G B, ex quo si subtraxeris r . quadratum ipsius I B, remanebit $\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} - r$, pro quadrato ipsius G I; erat autem eiusdem quadratum idem quod quadratum G C; nempe $a^4 - p a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$, erit proinde æquatio $a^4 - p a^2 + q a + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} - r$, & per antithesin proueniet demum æquatio inter a^4 & $+ p a^2 - q a - r$, itaut hæc sit æquationis formula $a^4 * + p a^2 + q a - r$.

Hoc idem Problema generali ratione ab Auctore adinuentas ac supra explicata, resolui facilius potest, &c.

Quoniam verò huius æquationis radix excedit latus quæsiti trianguli quarta parte coefficientis sub cubo; propterea secetur R C, æqualis huiusmodi quartæ parti; mox autem protracta D C, vsque ad P, ita vt D P, sit æqualis datæ trianguli basi. Deinde secta DZ, quæ sit æqualis perpendiculari datæ, ex Z agatur Z &, parallela ipsi D P, centro autem D, ad interuallum D R, describatur arcus R O, secans F O & in O; agantur D O, O P. Dico triangulum D O P. Problemati satisfacere.

Eius enim basis D P, est æqualis datæ basi, eius etiam perpendicularis quæ est æqualis D Z, æqualis est perpendiculari datæ.

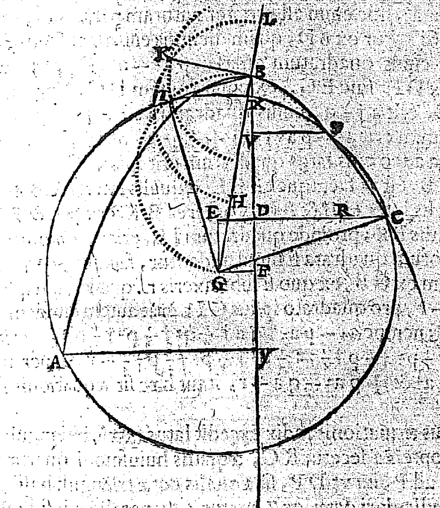
Dico iam aggregatum ex latere D O, & perpendiculari O Q, ad aggregatum ex eadem perpendiculari, & latere O P, habere datam rationem, &c.



H

$27137758050\,e^2 - 5650490664000000\,e - 44953368676760950625 - e^4 = 0$

Huius æquationis radix est 56745.



$BL = 1$

$XF = \frac{1}{2}p = 13568879025.$

$GF = \frac{1}{2}q = 282524533200000$

$BX = \frac{1}{2}.$

$BH = r = 44953368676760950625.$

$BK = ℞\, r = ℞\, 44951368767609506 25.$

$DC = e = 56745.$

$DC\ \text{Quadr.} = 3219995025.$

$BD = 3219995025.$

$BF = 13568879025\frac{1}{2}.$

Quoniam autem potest contingere vt $\frac{1}{2}$ p. quantitas superet quadratum ipsius D C; Proinde tunc ita procedendum erit.

Sit exposita quædam Parabole, cuius axis B Y; accipiatur latus eius rectum vnitatis loco, atque eius dimidium signetur in axe sitque B X; mox verò secetur X F, æqualis $\frac{1}{2}$ p; fiat verò G F, æqualis $\frac{1}{2}$ q; agatur G B, super quam describatur semirculus G I B; deinde protrahatur G B, ad L, vt B L, sit æqualis B, vnius dimidio; deinde facta sit B H, æqualis R, & super H L, describatur semicirculum priorem secans in I; postmodum autem agatur GI. Centro G, interuallo autem G I, describatur circulus secans parabolen in A, S, C; agaturque C D, perpendicularis ad YB, itempe SV; præterea A Y. Protrahatur CI, ad E, agaturque C E, parallela axi. Dico DC, esse radicem æquationis propositæ.

Quandoquidem D C, esto a, & ob naturam paraboles B D, debet esse a^2. Hunc enim in modum ducta BD, in latus rectum positum vnum producetur quadratum ipsius DC. Quoniam igitur F B, est $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$ si ex ipso auferatur BD, quod est a^2, remanebit $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - a^2$.

Huius autem quadratum est $a^4 - p a^2 - a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$, eritque quadratum residui DF. Et quoniam DC est a, & GF, siue G D, est $\frac{1}{2}$ q; propterea tota E C, erit $a + \frac{1}{2}q$. cuius quadratum est $a^2 + q a + \frac{1}{4}q^2$, quo addito ad $a^4 - p a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; proueniet $a^4 - p a^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + q\,a + \frac{1}{4}q^2$. At verò quoniam D B est $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$ eius quadratum

est $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$; cui si addatur quad. ex E D, vel GF, fiet $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q^2$; ex quo si subducatur quadratum ex B K, siue B I, remanebit, $\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q^2 - r$; & hoc erit quadratum ipsius G I, cui æquale est quadratum G C, superius habitum, quamobrem erit æquatio inter hæc; nimirum $a^4 + p a^2 + q a + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q^2 - r$; & per antithesin proueniet $a^4 = p a^2 - q a - r$.

Si itaque ex D C, radice æquationis, subtrahatur R C, quarta pars coefficientis sub cubo, remanebit D R, pro latere quæsiti trianguli, videlicet pro latere illo, quod ponebatur radix.

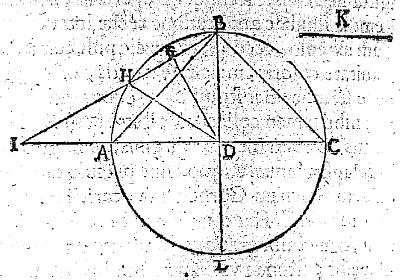
Cùm Venetias me contulissem, casu quidem incidi in Virum honestum, grauem, officij plenum, cùm virtutibus, tùm etiam satis amplâ fortunâ exornatum, &, vt verbo dicam, numeris omnibus absolutum, qui summis, egregijsque laudibus Illustriss. ac Excellentiss. D. Io: Baptistã Cornelium Piscopiæ, D. Marci Procuratorem Amplissimum, extollebat, ob oculos ponens sanguinis claritudinem, atque magnificentiam, cum incomparabili humanitate coniunctam, cuius famâ vehementer incitatus, splendidissimam eius Domum adij; ab hoc præclariss., omnique laudationis genere præstantiss. Senatore beneuolè, ac humaniter exceptus: secum precibus egi, vt Bibliothecam, & mirè ornatam, & copiosam, quam apud ipsum extare iam pridem audieram, mihi pro ea, qua pollebat humanitate, ostenderet. Eam igitur ingressus, Archimedis operibus euolutis, quæ super tabulam aduerteram, incidi in Lemma illud de applicatione rectæ inter conuexum peripheriæ, & diametrum productam. Tùm extẽplo, ecce Virgo specie pulcherrima, membrorum apta dispositione, cum quadam suauitate coloris, maiestate capitis, oris dignitate, spectabilis, quæ disertè admodum ea de re sermonem instituit; hinc sẽsibus etsi quodammodo destitutus, vt vox faucibus hæserit; non nihil tamen collectis viribus, petij ab Excellentiss. Senatore, vt mihi quidem Nomen, Genus, Patriam Inclytæ Virginis, tot singularibus, & corporis, & animi dotibus, velut è Cœlo delapsæ, innueret; quod sine piaculo tacere non possum. Ipse verò subridens ait, nomine quidem Helenam Corneliam vocari. Tùm ego, tanti ne fortassis Herois filia? annuit; tùm, non mirum. Hanc nostri æui rectè dixeris Literarum miraculum Venetam Mineruam, omnes sibi gratias conciliantem; vt omnibus scientijs exculta, Virgo quidem Encyclopedica dicenda videatur. Studijs bonarum Artium miro ordine operam nauauit; præmissa etenim Grammatice, & Humanioribus literis, præsertim Rethoricæ, studuit. Linguas percallet quatuor exoticas, Græcam, Latinam, Gallicam, Hispanicam, in quibus disertè loquitur. His porrò non contenta, summi, ac illustris ingenij alis, ad altiores Doctrinas euecta, Dialecticæ, Philosophiæ sedulò operam dedit, ad Theologiæ culmen ascendens, excelsæ Doctrinæ penitiora quidem arcana peruadens: nec Mathematicas Disciplinas neglexit, aduertens, magni faciendum illud Platonis adagiũ: Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; cuius supra quoque meminimus; & quidem par erat, vt in Astronomiam incumberet Virgo vitæ instituto purissima, quæ cogitatione saltem Cæli Galaxiam frequentaret. In hisce porrò studijs tantum profecit, vt erudito genere loquendi cunctis haud mediocrem admirationem inijciat: quodque etiam in primis est commendabile, ingenio pollet subtili, acri, & acuto, vt Musicen colat, concentum cieat suauissimum, Vocem fidibus ludens sic attemperet, vt Adstantium aures demulceat. Musa Veneta, Syren Adriaca; multò tamen suauior pulchritudinis harmonia, Cælitùs illi collata, cui animi virtutum melodia cælestis omninò respondet, ab Angelorum Choro deducta, adeò vt Principes multitudine plures ad sui amorem alliciat, inter quos reticere non possum, Lantgrauium Hassiæ Serenissimum, qui vnà cum Nuru Domum eius adiens, munificentissimè, ac singulariter exceptus, summis honoribus illam est prosecutus. Paria, nè maiora dicam, æstimationis obsequia Sereniss. Cardin. Boglionus Illustriss. Helenæ, singulares, atque præclarissimas virtutes admirans, præstitit. Nec desunt huius ordinis, qui ad Thalamos sacro iure connubij auidè peterent, nisi vni Christo eam addictam esse certò cognoscerent. Cæterum multùm Illa Fortunæ debet, quòd ipsa sit nacta Præstantissimum huius ætatis, Doctissimum, Omniscium, & Græcæ, & Latinæ Linguæ ad stuporem vsque Peritum, Illustriss. ac Reuerendiss. D. Aloysium Gradenicum Archipræsbyterum, atq; Primatem Præclarissimæ Vrbis Cydoniæ è Creta, Bibliophylacem Seren. Reipub. Ven., Virum suo nomine celeberrimum; Illam enim summâ diligentiâ, summâque curâ instruxit; nam aduertens viuido esse quidem ingenio, omnes eam disciplinas docuit, vt eandem sibi parem redderet; quo nihil exaggeratius dicere licet; nam vterq; portentum.

Helenæ Corneliæ laudes.

Hæc dicta sint de egregijs dotibus, quas ætas omnis commendabit, & euehet ad Cœlum; vnde & Cornelia Regia Prosapia, ac Serenissima Respublica in æternum viuet.

Sed quanti refert viam diligenter eligere, ad analysin instituendam, hinc plane addisces. Proponatur Problema de applicatione datæ magnitudine rectæ inter conuexum peripheriæ, & diametrum productam, quæ ad aliquod peripheriæ punctum protracta, pertingat; de quo supra verba fecimus. Plures quidem sunt casus, non æquè tamen difficiles. Si data magnitudine recta applicanda fuerit semidiametro æqualis; admodum facilis est resolutio; tunc enim punctum in peripheria designatur à recta, quæ ex centro erecta sit diametro perpendicularis.

Sit circulus A B C, cuius centrum D; ex D, erecta sit perpendicularis D B; ita vt recta K, magnitudine data sit æqualis semidiametro circuli prædicti, applicanda inter diametrum productam, ad partes exempli gratia A, & conuexum peripheriæ; vt protracta pertingat ad punctum B. Hoc nullius est laboris, si enim describatur Hexagonum, cuius latus HB, hoc verò protractum sit ad partes H, donec occurrat diametro C A, protractæ in I; constat ex Elementis H I, æqualem esse semidiametro circuli; atque adeò rectæ datæ K, æqualem.



At si punctum B, itidem fuerit in extremitate quadrantis, recta verò applicanda, non fuerit æqualis semidiametro; Sit iam factum, & recta applicanda sit b; at semidiameter circuli sit d; ex centro D, cadens perpendicularis ad I B, faciat segmenta G B, H G, æqualia; Itaque segmentum B G, sit a, proinde segmentum H G, erit itidem a; quare H B, erit $2a$; at segmentum I G, erit $b + a$, vt tota I B, erit $b + 2a$; & quia vt patet ex Elementis, vt est I B, ad B D, ita B D, ad G B, erit rectangulum I B G, æquale quadrato ex B D, quare $ba + 2a^2$ æquabitur d^2; ergo $\frac{1}{2}ba + a^2$, æquabitur $\frac{1}{2}d^2$, cuius æquationis radix est $\sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}d^2)} - \frac{1}{4}b$; æquabitur a. Hinc.

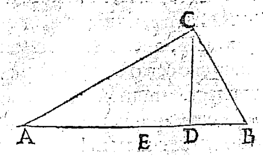
P O R I S M A.

Recta applicanda secetur in quatuor partes æquales, & quadrato vnius ex illis addatur dimidium quadrati ex semidiametro circuli; aggregati autem latus multetur eadem quarta parte datæ applicandæ; quod enim supereſt, erit segmentum G B; vnde eius duplum erit H B, quare per additionem ad datam applicandam, innoteſcet I B;

Hoc cum illo coincidit.

Dato vno ex lateribus trianguli rectanguli, dataque differentia segmentorum baseos, reperire triangulum.

Sit iam factum, & triangulum illud rectangulum sit A C B, cuius latus circa rectum sit BC, nempè d differentia segmentorum baseos sit A E, adeo vt segmentorum D B, AD, differentia AE sit b. Oporteat reperire triangulum Segmentum DB, esto a, at D E, erit illi æqualis itidem a; ergo E B, erit $2a$; quamobrem A B, erit $b + 2a$; propterea cùm sit vt A B, ad B C, ita B C, ad D B, erit rectangulum A B D, æquale quadrato B C, quare $ba + 2a^2$ æquabitur d^2; ergo $\frac{1}{2}ba + a^2$ æquabitur $\frac{1}{2}d^2$. Huius æquationis radix est $\sqrt{(\frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{2}d^2)} - \frac{1}{4}b$, quæ æquabitur a. Hinc.



P O-

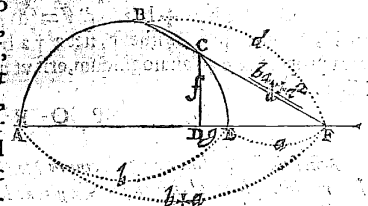
P O R I S M A.

Ad quadratum è quarta parte differentiæ segmentorum baseos addatur, dimidium quadrati lateris dati circa rectum; aggregati latus multatum eadem quarta parte differentiæ segmentorum baseos; exhibebit segmentum minus baseos, vnde segmentum maius non latebit, quare triangulum quoque constabit.

P R O B L E M A.

Sit circulus A B E, cuius diameter A E protracta sit in infinitum ad partes E, datumque sit in peripheria punctum C, aptanda sit quædam data, vt B F, quæ transeundo per C, ipsa linea data B F, sit intercepta inter peripheriam, hoc est inter peripheriæ concauum, & protractam diametrum A E.

Supponamus diametrum A E, esse b, at verò recta B F, magnitudine data sit d, ex puncto C, cadat perpendicularis C D, quæ appelletur f, segmentum verò D E, sit g, segmentum E F, sit a; quoniam igitur est, vt B F, ad F A, ità E F, ad C F; & A F, est $b + a$, B F, est d, insuper E F, est a, si fiat vt d, ad $b + a$, nempè B F, ad A F, ità a, hoc est E F, ad aliam, putà C F, hæc erit $\frac{ba + a^2}{d}$, & quia angulus C D F, est rectus, propterea si à quadrato ex C F, hoc est ex $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2}$, si ex hoc, inquam, auferatur quadratum ex C D, nimirum f^2, remanebit $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$, & hoc erit quadratum ex D F, itaque $\sqrt{(\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2)}$ erit D F, & quia E F, est a, atque D E, est g, si ex D F, auferatur a, quod remanet æquabitur D E, nempè g, proindè $\sqrt{(\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2)} - a$ æquabitur g, & per antithesin $\sqrt{(\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2)}$ æquabitur $g + a$, quamobrem & eorum quadrata æqualia erunt, nempè $\frac{b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{d^2} - f^2$ æquabitur $g^2 + 2ga + a^2$, omnibus ductis in d^2, ad tollendam fractionem, fiet $b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 - d^2f^2$ quod æquabitur $d^2g^2 + 2d^2ga + d^2a^2$, & per antithesin rursus $b^2a^2 + 2ba^3 + a^4 - 2d^2ga - d^2a^2 = d^2g^2 + d^2f^2$, seu $a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 + d^2f^2$, reuocetur æquatio ad analogismum, & fiet vt $a^3 + 2ba^2 + b^2a - d^2a - 2d^2g$ ad $dg^2 + df^2$, ità d, ad a, Hinc.



P O R I S M A.

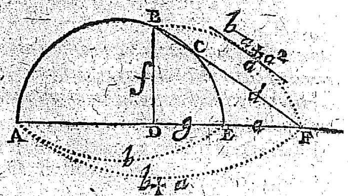
Beneficio igitur Lineæ ad postremum genus Medicearum pertinentium, si fiat constructio, siue Effectio, hæc resolutis plano-planis artificio iam explicato in simplicissimas longitudines, & repetitis Analyseos vestigijs, regia Euclidis via, demonstrabitur, vt supra docuimus, &c.

P R O B L E M A.

Sit circulus A B E, cuius diameter A E, protracta sit in infinitum ad partes E, datumque sit in peripheria punctum B, aptanda sit inter diametrum productam, & conuexum peripheriæ data quædam C F, quæ protracta ad partes C, perueniat ad datum punctum B.

Suppona-

Supponamus diametrum A E, esse b, at verò C F, magnitudine data sit d, ex puncto B, cadat perpendicularis B D, quæ appelletur f, segmentum verò D E, dicatur g, at verò segmentum E F, esto a. Quoniam igitur est vt C F, ad E F, ità A F, ad B F, & A F, est $b + a$, propterea fiat vt d, ad a, ita $b + a$, ad aliam, eaque erit $\frac{ba + a^2}{d}$ tanta itaque erit B F; huius quadratum est $\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2}{d^2}$ à quo si auferatur quadratum ex B D, nempè f^2, remanebit $\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2}{d^2} - f^2$, eritque quadratum ex D F, itaque ipsa D F, erit $\sqrt{\left(\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}\right)}$ à qua si auferatur E F, nempè a, remanebit g, ac proindè fiet æquatio $\sqrt{\left(\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}\right)} - a = g$, & per antithesin $\sqrt{\left(\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}\right)} = g + a$, ergo & eorum quadrata æqualia erunt, quamobrem $\frac{a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2}{d^2}$ æquabitur $g^2 + 2ga + a^2$, & rursus per multiplicationem fiet æquatio huiusmodi $a^4 + 2ba^3 + b^2a^2 - d^2f^2 = d^2g^2 + 2d^2ga + d^2a^2$, ductis nimirum omnibus in d^2, & rursus per antithesin, fiet $a^4 + 2ba^3 + \frac{b^2}{d^2}a^2 - 2d^2ga = d^2g^2 + d^2f^2$, reuocata autem proportione ad analogismum, erit vt $a^3 + 2ba^2 + \frac{b^2}{d^2}a - 2d^2g$ ad $dg^2 + df^2$, ità d ad a Hinc.



P O R I S M A.

Beneficio igitur lineæ ad postremum Medicearum genus pertinentium si comparetur effectio, hac resolutis plano-planis in simplicissimas longitudines, & repetitis Analyseos vestigijs regia Euclidis via demonstrabitur &c. Arte, quam superius tradidimus &c.

APPENDIX

DE MAXIMIS, ET MINIMIS.

ARgumentum hoc subtiliter, & accuratè admodum, à Præclarissimo Geometra Apollonio Pergæo fuisse tractatum Antiqua tamen Methodo, ex eius monumentis cuique perspectum, ac manifestum esse potest; sed idem non minori cum laude fuisse præstitum à Francisco Maurolyco Abbate Messanense, compertum est ijs, qui duos hac de re libros ab illo conscriptos euoluerunt; adeo enim eggregie se gessit, tantaque cum laude prouinciam suscepit, vt Apollonij Libros defectum supplere contendens (hi namque nondum tunc temporis in lucem prodierant) testimonio Sapientum quasi Apollonium ipsum, ferè superauerit.

Cæterum haud mediocriter ad rem de qua agimus Recentiorum Analystarum industria conducit; hæc enim speciosæ Logistices beneficio, præclara, & admiranda consequitur; quamobrem non erit abs re si in hoc præsenti Capite de noua hac Methodo sermonem instituamus, quod per aliquas Propositiones perficiemus.

PROPOSITIO I.

Maximum rectangulum contentum sub duobus segmentis propositi lateris reperire.

Supponamus datum latus esse E F, sintque segmenta EG, G F; sitque rectangulum quidem maximum, quod sub huiusmodi segmentis continetur. Oporteat cognoscere vbi nam G, punctum cadat.

E G F

Latus E F, dicatur b; segmentum E G, sit a; itaque G F, erit $b - a$; quamobrem rectangulum E G F, erit $ba - a^2$; Hæc igitur sit prima æquatio.

Supponamus deinde e, æquari o; cum ergo e nihil valeat, adhuc $a + e$ æquabitur segmento EG, & $b - a - e$ æquabitur segmento GF; Proinde rectang. EGF, æquabitur $ba - a^2 - 2ae + be - e^2$; sed erat idem rectangulum E G F, æquale $ba - a^2$, ergo $ba - a^2$ æquabitur $ba - a^2 - 2ae + be - e^2$; & per antithesin $ba - a^2 + 2ae + e^2 = ba - a^2 + be$; & rursus $2ae + e^2 = be$; & per hypobibasmum fiet $2a + e = b$. Supponamus autem e æquari o; seu nihilo, proinde 2 a æquabitur b; atque adeo $a = \frac{1}{2}b$. Vnde.

P O R I S M A.

Rectangulum igitur maximum est sub segmentis dati lateris cum segmenta sunt inter se æqualia.

Hoc demonstrauit Euclides Lib. 6. Propositione 27.

PROPOSITIO II.

Reperire maximum solidum, quod fieri possit sub segmento propositæ rectæ lineæ.

Data sit recta A B, quam oporteat ita secare, vt quod sit sub altero segmento in alterius segmenti quadratum, sit maximum omnium quæ sub quacunque alia sectione fieri possint.

A b B
a b -- a

Proposita recta esto b; & segmentum vnum dicatur a, alterum vero $b - a$, solidum autem quod fit ex $b - a$ in a^2 est $ba^2 - a^3$; reliquum est vt determinemus punctum sectionis, atque adeo segmentum a, ita vt solidum prædictum sit omnium maximum.

Supponamus $e = o$; atque segmentum vnum propositæ lineæ, esto $a + e$, alterum enim erit $b - a - e$; quadratum vero ex $a + e$ erit $a^2 + 2ae + e^2$, quod ductum in $b - a$

$- a - e$, facit solidum $b a^2 - a^3 + 2 b a e + b e^2 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3$, quod æquabitur $b a^2 - a^3$; & per antithesin $2 b a e + b e^2 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3 = o$. Omnibus autem applicatis ad e, quod est hypobibasmum fecisse; fiet $2 b a + b e - 3 a^2 - 3 a e - e^2 = o$. Atque adeo, fiet etiam per antithesin $2 b a - 3 a^2 = 3 a e + e^2 - b e$. Quoniam autem e, æquatur o, proinde $3 a e + e^2 - b e$, valebit o, quare per antithesin fiet $2 b a = 3 a^2$. Omnibus applicatis ad a, fiet $2 b = 3 a$; Omnibus etiam diuisis per 3, fiet $\frac{2}{3} b = a$. Quamobrem segmentum positum a, erit æquale duabus tertijs partibus rectæ propositæ lineæ.

PORISMA.

Maximum solidum, quod applicatur lineæ cubo deficiens, est illud, quod tertiæ parti propositæ lineæ applicatur, & cubus adiacet duabus tertijs partibus datæ rectæ lineæ.

PROPOSITIO III.

Reperire solidum maximum, quod applicari possit dato plano, deficiens solido simile dato, solidumque datum, cui debet assimilari defectus, sit cubus.

Datum sit planum, illudque dicatur b pl. & oporteat illud ita secare; vt si segmento alteri applicetur solidum cubo deficiens, sit maximum omnium, quæ applicari possunt, deficentium figura simili, similiterque posita.

Quandoquidem deffectus cubus est; propterea oportet planum datum applicare lateri cubi deffectiui.

Latus istud esto a; alterum erit $\frac{b\,pl}{a}$, quod in duo segmenta diuidetur, quorum vnum erit a, alterum verò erit $\frac{b\,pl}{a} - a$ quæ quidem pars ducta in a^2. producet solidum applicatum, nempe $b\,pl.\, a - a^3$. Superest; vt determinetur quantitas ipsius a; itaut $b\,pl.\, a - a^3$, sit solidum illud maximum, applicatum b pl. deficiens cubo.

Supponamus e, æquari o. Atque latus vnum erit $a + e$, ad quod applicetur b pl. vt consurgat latus $\frac{b\,pl}{a+e}$ cuius segmentum vnum erit $a + e$; alterum verò erit $\frac{b\,pl}{a+e} - a - e$. Postremum hoc segmentum ductum in quadratum ipsius $a + e$, hoc est in $a^2 + 2 a e + e^2$ erit solidum applicatum, nimirum $b\,pl.\, a + b\,pl.\, e - a^3 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3 = b\,pl.\, a - a^3$, & per antithesin fiet $b\,pl.\, e - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3 = o$. atque adeo rursus fiet $b\,pl.\, e = 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$. Omnibus applicatis ad e, erit $b\,pl. = 3 a^2 + 3 a e + e^2$. Quoniam verò e, supponitur æquale o; proinde totum illud factum sub e, erit æquale o. Quamobrem b pl. æquabitur $3 a^2$, ac proinde tertia pars dati plani, erit quadrato ex a, æquale.

Quapropter maximum solidum erit, quod ad duas tertias partes propositi plani applicatur: Sumatur itaque tertia pars propositi plani, & inquiratur latus, quod illam potest ad quod applicatum sit b pl. vt emergat tripla longitudo lateris, cui facta est applicatio, huius enim duæ partes ductæ in reliquæ partis quadratum constituunt maximum solidum applicatum deficiens cubo. Vnde,

PORISMA.

Maximum solidum, quod potest applicari dato plano deficiens cubo, est illud quod applicatur duabus tertijs partibus dati plani.

PROPOSITIO IV.

Reperire maximum plano-planum, quod possit applicari datæ lineæ deficiens plano-plano simili dato, atque datum, cui debeat assimilari defectus, sit quadrato-quadratum.

Data sit recta b; cui applicandum sit plano-planum, deficiens quadrato-quadrato, quod sit omnium maximum.

Secanda erit recta b; vt quod fit ex altero segmento in alterius segmenti cubum sit omnium maximum.

Rectæ quidem b; segmentum vnum sit a; alterum erit $b - a$; at verò plano-planum applicatum erit $b a^3 - a^4$; Oportet proinde determinare rationem partium a, & $b - a$; itaut hoc

hoc productum sit omnium maximum. Esto e, æqualis o, seu nihilo; sitque segmentum vnum $a + e$ aliud verò sit $b - a - e$, cubus autē ex $a + e$ est $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$ quo ducto in $b - a - e$, fit productum, vt hic à latere cernis, & instituta operatione secundum Artis præcepta, adhibita congrui antithesi, denique peruenitur ad æquationem compositam hanc videlicet $3 b a^2 e + 3 b a e^2 + b e^3 = 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$, & per hypobibasmum proueniet æquatio $3 b a^2 + 3 b a e + b e^2 = 4 a^3 + 6 a^2 e + 4 a e^2 + e^3$. Vbi aduerte per primam antithesin, quando nempè subtrahitur $b a^3 - a^4$, quod superest æquale est nihilo; atque adeò rursus per antithesin fit æquatio illa $3 b a^2 e + 3 b a e^2 + b e^3 = 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$; vnde omnibus applicatis ad e, fiet $3 b a^2 + 3 b a e + b e^2 = 4 a^3 + 6 a^2 e + 4 a e^2 + e^3$.

$$
\begin{array}{r}
a + e \\
a + e \\
\hline
a e + e^2 \\
a^2 + a e \\
\hline
a^2 + 2 a e + e^2 \\
a + e \\
\hline
a^2 e + 2 a e^2 + e^3 \\
a^3 + 2 a^2 e + a e^2 \\
\hline
a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3 \\
b - a - e \\
\hline
- a^3 e - 3 a^2 e^2 - 3 a e^3 - e^4 \\
- a^4 - 3 a^3 e - 3 a^2 e^2 - a e^3 \\
b a^3 + 3 b a^2 e + 3 b a e^2 + b e^3 \\
\hline
b a^3 + 3 b a^2 e + 3 b a e^2 + b e^3 - a^4 - 4 a^3 e - 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4 \\
b a^3 - a^4 \\
\hline
3 b a^2 e + 3 b a e^2 + b e^3 - 4 a^3 e - 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4 = o \\
3 b a^2 e + 3 b a e^2 + b e^3 = 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4 \\
3 b a^2 + 3 b a e + b e^2 = 4 a^3 + 6 a^2 e + 4 a e^2 + e^3 \\
3 b a^2 = 4 a^3 \\
3 b = 4 a
\end{array}
$$

Nunc autem reiectis omnibus ijs, quæ non potuerunt ab e, liberari; quandoquidem e, supponitur æquari nihilo, seu o; proinde fiet $3 b a^2 = 4 a^3$; omnibus autem applicatis ad a, fiet $3 b = 4 a$. Quamobrem a, vnde efformatur quadrato-quadratum, erit æquale tribus ex quatuor partibus ipsius b; atque adeò reliqua quarta pars eiusdem b, erit illa, cui applicandum erit maximum plano-planum.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-quadrato est id, quod applicatur quartæ parti datæ lineæ, & quadrato-quadratum quod deficit, occupat tres quartas partes datæ lineæ.

PROPOSITIO V.

Reperire maximum plano-planum, quod possit applicari dato plano, cum defectu plano-plani similis dato, & datum, cui debeat assimilari defectus, sit quadrato-quadratum.

Datum sit b planum, cui applicandum sit plano-planum deficiens quadrato-quadrato sit autem huiusmodi plano-planum omnium maximum; est autem plano-plani segmentum futurum quadratum; vnde componitur quadrato-quadratum deficiens. Sit autem a, cui applicetur b plan. ex ipso autem quadratum est a^2, quo subtracto ex prædicto b plano, fiet reliquum b planum $- a^2$, quod ductum in a^2, facit plano-planum $b\,plan.\, a^2 - a^4$; quod erit plano-planum applicatum cum defectu quadrato-quadrati.

At verò in locum ipsius a, subrogetur $a + e$, atque e æquetur o, seu nihilo, fiat autem quadratum ex $a + e$, quod est $a^2 + 2 a e + e^2$, quod si detrahatur ex b pl. fiet reliquum $b\,pl. - a^2 - 2 a e - e^2$, quod quidem ductum in $a^2 + 2 a e + e^2$ producet plano-planum; ex b pl.

I

pl. $a^2 + 2$ pl. pl. ex b pl. $a e +$ pl. pl. ex b pl. $e^2 - a^4 - 4a^3 e - 6a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4$. Ex quo si dempseris, superius factum, nempe pl. pl. ex b pl. $a^2 - a^4$, fiet reliquum 2 pl. pl. ex b pl. $a e +$ pl. pl. ex b pl. $e^2 - 4 a^3 e - 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4 = 0$.

Per antithesin autem fiet 2 pl. pl. ex b pl. $a e +$ pl. pl. ex b pl. e^2 æquale $4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$; Omnibus autem applicatis ad e, fiet 2 b pl. $a +$ b pl. $e = 4 a^3 + 6 a^2 e + 4 a e^2 + e^3$; omnibus autem reiectis, quæ sunt sub e, cum e, æquetur o, erit 2 b pl. $a = 4 a^3$, omnibusque applicatis ad a, fiet 2 b pl. $= 4 a^2$, ergo b pl. $= 2 a^2$, quare $\frac{1}{2}$ b pl. æquatur a^2. Itaque a^2, occupat dimidium dati plani; & plano-planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato-quadrato, est id, quod applicatur dimidio dati plani, seu duabus ex quatuor partibus dati plani, &c.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur dato plano, deficiens quadrato-quadrato, est id, quod applicatur duabus partibus ex quatuor, in quas diuiditur planum, & quadrato-quadratum, quod deficit, occupat reliquas duas partes.

PROPOSITIO VI.

Reperire maximum plano-planum, quod possit applicari dato solido, cum defectu plano-plani similis dato, & datum, cui debet assimilari defectus, sit quadrato-quadratum.

Sit datum b solid. cui sit applicandum plano-planum deficiens quadrato-quadrato; ipsum autem plano-planum debeat esse omnium maximum. Cum autem solidi segmentum ex quo fieri debet quadrato-quadratum deficiens, necesse & sit, esse cubum.

Esto igitur a, cui applicetur b sol. si autem ex a fiat cubus, proueniet a^3, quo subtracto a^3 ex b solido fiet reliquum b sol. $- a^3$, quo ducto in a proueniet pl. pl. ex b sol. $a - a^4$, quod erit plano-planum applicatum cum defectu quadrato-quadrati ex a.

At verò rursus loco ipsius a, substituatur $a + e$, at vero e, iuxta hanc resolutionis rationem æquetur o, vel nihilo, erit quidem plano-planum applicatum deficiens quadrato-quadrato, plano-planum ex b sol. $a +$ pl. pl. ex b sol. $e - a^4 - 4 a^3 e - 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4$ ex quo si dempseris superius iam factum, prosiliet pro differentia pl. pl. ex b sol. $e - 4 a^3 e - 6$ pl. pl. $a^2 e^2 - 4 a e^3 - e^4$, quæ differentia æquabitur o, seu nihilo per antithesin, ac omnibus applicatis ad e; fiet b sol. æquale $4 a^3 + 6 a^2 e + 4 a e^2 + e^3$ de medio sublatis ijs, quæ sub e reperiuntur in æquatione, cum æquentur nihilo fiet b solidum æquale $4 a^3$, quare $4 a^3 =$ b sol. vnde a^3 æqualem $\frac{1}{4}$ b sol. ex huiusmodi igitur quantitate puta a, cuius valorem expressimus effingi debet quadrato-quadratum, atque adeò plano-planum deficiens quadrato-quadrato applicabitur tribus ex quatuor partibus dati solidi &c. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-planum, quod applicatur dato solido, deficiens quadrato-quadrato, est illud, quod applicatur tribus ex quatuor partibus dati solidi, & quadrato-quadratum defficiens reliquam quartam occupat partem.

PROPOSITIO VII.

Reperire maximum plano-solidum, quod applicari possit datæ lineæ, deficiens quadrato-cubo.

Data sit recta b, cuius segmentum vnum esto a, aliud quidem erit $b - a$, quod autem fit ex $b - a$ in a^4, erit $b a^4 - a^5$; hoc erit autem plano-solidum quæsitum.

Supponamus verò vnum ipsius b segmentum esse $a + e$, alterum erit $b - a - e$, quadrato-quadratum ex $a + e$ est $a^4 + 4 a^3 e + 6 e^2 a^2 + 4 a e^3 + e^4$, quod quidem ductum in $b - a - e$ facit $b a^4 + 4 b a^3 e + 6 b e^2 a^2 + 4 b a e^3 a^2 + b e^4 - a^5 - 5 a^4 e - 10 e^2 a^3 - 10 a^2 e^3 - 5 a e^4 - e^5$. Ex quo si dempseris $b a^4 - a^5$, fiet residuum $4 b a^3 e + 6 b e^2 a^2 + 4 b a e^3 + b e^4 - 5 a^4 e - 10 e^2 a^3 - 10 a^2 e^3 - 5 a e^4 - e^5$. Omnibus applicatis ad e, & ijs retentis; quæ ab e non afficiuntur, si quidem hæc nihilo æqualia supponuntur, atque etiam adhibi-

ta con-

ta congrua antithesi fiet $4 b a^3 = 5 a^4$, atque omnibus applicatis ad a^3; fiet $4 b = 5 a$. Vnde quatuor ex quinque partibus ipsius b, erunt æquales a. Itaque maximum plano-solidum, quod ipsi b, applicatur defficiens quadrato-cubo, erit quod applicatur quartæ parti ipsius b. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-solidum, quod applicatur datæ lineæ deficiens quadrato-cubo, est id, quod applicatur quintæ parti datæ lineæ, & quadrato-cubus, qui deficit, occupat reliquas quatuor ex quinque partibus propositæ lineæ.

PROPOSITIO VIII.

Reperire maximum plano-solidum, quod possit applicari dato plano deficiens quadrato-cubo.

Datum sit b planum, & ita sit instituenda operatio, vt præscribitur, erit autem opus ita b planum diuedere, vt si ex altero ipsius segmento fiat quadratum, & ex eodem latere fiat cubus quod fit ex reliquo plani in hunc cubum effictum; sit omnium maximum.

Segmentum iam dictum sit a^2; reliquum igitur plani, erit b pl. $- a^2$, quod ductum in a^3 producat plano-solidum applicatum, nempe b plan. $a^3 - a^5$.

Deinde, segmentum sit $a^2 + 2 a e + e^2$, supposito tamen quod e æquetur o, seu nihilo; reliquum plani erit b pl. $- a^2 - 2 a e - e^2$; quo ducto in cubum ex $a + e$, nempe in $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$, fiet b pl. $a^3 - a^5 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 + 3$ b pl. $a^2 e + 3$ b pl. $e^2 a +$ b pl. $e^3 - 10 a^2 e^3 - 5 e^4 a - e^5$, ex quo si auferatur superius factum, nempe b pl. $a^3 - a^5$, fiet residuum 3 b pl. $a^2 e + 3$ b pl. $e^2 a +$ b pl. $e^3 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 - 5 e^4 a - e^5$. Omnibus autem applicatis ad e, ijs tantum seruatis, quæ ab e liberantur, & congrua adhiaita antithesi; fiet 3 b pl. $a^2 = 5 a^4$, facto autem parabolismo per applicationem ad a^2 prosiliet 3 b pl. $= 5 a^2$, vnde ex quinque partibus in quas intelligitur b pl. esse diuisum, tres quidem æquales erunt ipsi a^2.

At cum ex a^2, efformandus sit quadrato-cubus, quo applicatum maximum plano-solidum debet deficere; ipsum plano-solidum, quod applicatur dato plano, defficiens vt diximus erit id, quod applicatur reliquis duabus, ex quinque partibus, propositi plani. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-solidum, quod applicatur dato plano deficiens quadrato-cubo est id quod applicatur duabus ex quinque partibus dati plani, & quadrato-cubus, quo applicatum deficit, occupat tres reliquas partes eiusdem plani.

PROPOSITIO IX.

Reperire maximum plano-solidum, quod possit applicari dato solido, deficiens quadrato-cubo.

Datum sit b solidum, & faciendum sit quod imperatur. Itaque b sol. ita secandum erit, vt si alterum segmentum ipsius effingatur in cubum, quod fit ex reliquo solidi in quadratum huius effiicti cubi, sit maximum omnium eorum, quæ fieri possunt, si quomodocunque, aliter, datum solidum secetur.

Segmentum igitur sit a^3 reliquum itaque erit b sol. $- a^3$; quod ductum in a^2 producit plano-solidum applicatum b solido $a^2 - a^5$.

Supponamus prædictum segmentum esse $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$; nempe cubum ex $a + e$, fiet reliquum b sol. $- a^3 - 3 a^2 e - 3 a e^2 - e^3$, quo ducto in $a^2 + 2 a e + e^2$, proueniet b sol. $a^2 + 2$ b sol. $a e +$ b sol. $e^2 - a^5 - 5 a^4 e - 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 - 5 a e^4 - e^5$. Ex hoc verò demendū est prius factum scilicet ex b sol. $a^2 - a^5$, reliquum verò applicetur ad e; reiectis ijs, quæ cum e implicantur, & facta antithesi, proueniet 2 b sol. $a = 5 a^4$, omnibus autem applicatis ad 5 a fiet $a^3 = \frac{2}{5}$ b solidi. At verò ex a^3 efformandus est a^5; ob id plano-solidum applicatum dato solido deficiens quadrato-cubo id, quod applicabitur reliquis tribus ex quinque partibus dati solidi. Hinc.

PORISMA.

Maximum plano-solidum, quod applicatur dato solido deficiens quadrato-cubo est id, quod applicatur tribus ex quinque partibus dati solidi, & quadrato-cubus, quo solidum applicatum deficit, reliquas duas occupat partes.

PROPOSITIO X.

Reperire maximum plano-solidum, quod possit applicari, dato plano-plano deficiens, quadrato-cubo.

Datum sit b pl. pl. & oporteat facere, quod est iniunctum, erit secandum b pl. pl. itaut si ex altero ipsius segmento efficiatur quadrato-quadratum, quod fit ex reliquo plano-plani in latus ipsius quadrato-quadrati sit maximum omnium eorum, quæ fieri possunt; quocunque modo plano-planum sectum fuerit.

Segmentum primò sit a^4; reliquum igitur erit b pl.pl. $- a^4$, quod ductum in a, producet plano-solidum applicatum b pl.pl. $a - a^5$.

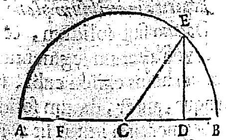
Deinde segmentum sit $a^4 + 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4$, nempè quadrato-quadratum ex $a + e$, supposito tamen, quod e æquetur o, seu nihilo, reliquum igitur segmentum erit b pl.pl. $- a^4 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - e^4$, quod ductum in $a + e$ producit factum ex b pl.pl. $a +$ b pl.pl. $e - a^5 - 5a^4e - 10a^3e^2 - 10a^2e^3 - 5ae^4 - e^5$. Ex hoc autem si detrahatur prius factum nempe b pl. pl. $a - a^5$ reliquum autem applicetur ad e reiectis ijs, quæ remanent implicata cum e, & congrua adhibita antithesi, proueniet æquatio $5a^4 =$ b pl.plano, si verò vtraque pars diuidatur per 5, fiet $a^4 = \frac{1}{5}$ b plano-plani. At cum ex a^4 effingi debeat quadrato-cubus, erit plano-solidum applicatum dato plano-plano deficiens quadrato-cubo, id quod applicatur reliquis quatuor ex quinque partibus, in quas dictum iam plano-planum supponitur esse diuisum. Hinc,

PORISMA.

Maximum plano solidum, quod applicatur dato plano-plano, deficiens quadrato-cubo est id quod applicatur quatuor ex quinque partibus dati plano-plani, & quadrato-cubus quo plano-planum applicatum deficit, reliquam quintam occupat partem.

PROPOSITIO XI.

Maximum rectangulum reperire, quod sub media, & differentia trium proportionalium comprehenditur.



Quandoquidem si fuerit recta diuisa vtcunque, & super ipsam descriptus sit semicirculus, ex puncto autem diuisionis, excitetur recta vsque ad semicirculi peripheriam.

Dimonstratum est in Elementis hanc excitatam esse medio loco proportionalem inter illa segmenta. Deinde super datam A B, diuisam in D, intelligatur descriptus semicirculus, & ex puncto D, excitata sit recta perpendicularis, quæ ad ipsam peripheriam perueniat in E, nam A D, D E, D B, proportionales erunt. Secetur autem F C, æqualis C D. Supponamus rectangulum maximum esse F D E. Oportet inquirere diuisionis punctum D.

Supponamus A C, vel C B, esse b, at verò C D, C F, esse a. Segmentum A D, erit $b \pm a$, & reliquum segmentum D B, erit $b - a$. Itaque $2a$, æquabitur F D; Quoniam autem A D, æqualis est $b \pm a$, & D B, æqualis est $b - a$, erit rectangulum A D B, idem quod $b^2 - a^2$. Et quia rectangulum A D B, æquale est quadrato D E, siquidem A D, D E, D B, sunt proportionales, latus igitur potens rectanctulum A D B, æquabitur quadrato D E; atque adeò ℞$(b^2 - a^2)$ æquabitur D E; at verò si ℞$(b^2 - a^2)$ ducatur in $2a$, proueniet ℞$(4b^2a^2 - 4a^4)$ pro rectangulo comprehenso sub E D, & F D; Seruetur autem

autem ℞$(4b^2a^2 - 4a^4)$ cum hoc enim instituenda erit comparatio, vt mox planum fiet.

Supponamus e, æquari o, æquari C D, vel C F; itaque $b \pm a \pm e$, æquabitur segmento A D, quemadmodum $b - a - e$, æquabitur D B; ac proinde ipsa differentia F D, erit $2a + 2e$; rectangulum verò sub A D, & D B, est $b^2 - a^2 - 2ae - e^2$; itaque E D, erit ℞$(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)$, quæ si ducatur in $2a + 2e$, nempè F D, proueniet rectangulum sub F D, D E, nimirum ℞$(4b^2a^2 - 4a^4 \pm 8b^2ae + 4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4)$ quod æquabitur ℞$(4b^2a^2 - 4a^4)$ atque adeo etiam $4b^2a^2 - 4a^4 \pm 8b^2ae + 4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4$, quod æquabitur $4b^2a^2 - 4a^4$, & per antithesin $8b^2ae \pm 4b^2e^2$; æquabitur $16a^3e \pm 24a^2e^2 + 16ae^3 - 4e^4$, & per hypobibasmum $8b^2a + 4b^2e$, æquabitur $16a^3 \pm 24a^2e + 16ae^2 - 4e^3$.

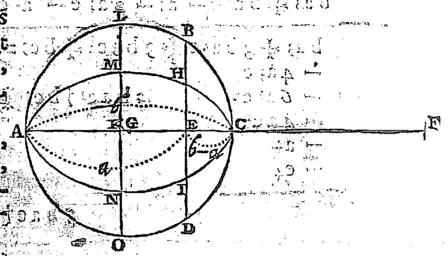
Continuanda autem æquatio est in ijs, quibus e, deest; ac proinde $8b^2a$, æquabitur $16a^3$, factoque parabolismo, nimirum omnibus diuisis per 8, proueniet $b^2a = 2a^3$, & per hypobibasmum $b^2 = 2a^2$, & rursus per parabolismum $\frac{1}{2}b^2 = a^2$; atque adeo ℞$\frac{1}{2}b^2$ æquabitur a. Hinc.

PORISMA.

Est igitur quæsitum segmentum C D, id quod potest dimidium quadrati ipsius A C, vel C B.

PROPOSITIO XII.

A data circuli peripheria arcum abscindere, ita vt rectangulum sub eius corda, in saggitam, sit maximum.



Datus sit circulus A B C, cuius centrum G. diameter A C. Oportet ab eius peripheria arcum abscindere, ita vt rectangulum sub eius corda in sagittam, sit omnium maximum.

Supponamus arcum esse B C D, itaut corda eius ductu in sagittam AE, faciat rectangulum omnium maximum. Inquirendum est igitur punctum E.

Supponamus A C, esse b, & A E, esse a ergo E C, erit $b - a$, rectangulum sub his est $ba - a^2$, cuius latus est ℞$(ba - a^2)$ quod æquale est ipsi E B; Ducatur E B, nempe ℞$(ba - a^2)$ in A E, puta a, & proueniet ℞$(ba^3 - a^4)$ pro rectangulo AEB, cuius duplum erit rectangulum sub A E, & B D, scilicet 2 ℞$(ba^3 - a^4)$ seu ℞$(4ba^3 - a^4)$ seu 4 ℞$(ba^3 - a^4)$.

Nunc supponamus A E, esse $a \pm e$, nam E C, erit $b - a - e$ rectangulum autem sub his est $ba + be - a^2 - 2ae - e^2$. Itaque eius latus, puta ℞$(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ æquabitur B E. Si igitur ℞$(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ ducatur in $a + e$, proueniet ℞$(ba^3 +$ &c.$)$ quod æquabitur ℞$(ba^3 - a^4)$ atque adeo $ba^3 +$ &c. æquabitur $ba^3 - a^4$. Hæc autem in sequentibus clara, manifestaque fient.

$$\begin{array}{l} a+e \\ a+e \\ \hline ae+e^2 \\ a^2+ae \\ \hline a^2+2ae+e^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} b-a \\ a \\ \hline ba-a^2 \end{array}$$

$$\sqrt{(ba-a^2)} \qquad \begin{array}{c} a \\ a \\ \hline a^2 \end{array}$$

$$\sqrt{(ba^3-a^4)}.$$ Rectangulum AEB.

$$\begin{array}{c} b-a-e \\ a+e \\ \hline be-ae-e^2 \\ ba-a^2-ae \\ \hline ba+be-a^2-2ae-e^2 \end{array}$$

$$\sqrt{(ba+be-a^2-2ae-e^2)}\,BE.$$

$$\begin{array}{l} ba+be-a^2-2ae-e^2 \\ a^2+2ae+e^2 \\ \hline bae^2+be^3-a^2e^2-2ae^3-e^4 \\ 2ba^2e+2bae^2-2a^3e-4a^2e^2-2ae^3 \\ ba^3+ba^2e-a^4-2a^3e-a^2e^2 \\ \hline ba^3+3ba^2e+3bae^2+be^3=ba^3-a^4 \\ \quad -4a^3e \\ \quad -6a^2e^2 \\ \quad -4ae^3 \\ \quad -a^4 \\ \quad -e^4 \end{array}$$

$$3bae^2+be^3+3ba^2e=4a^3e+6a^2e^2+4ae^3+e^4$$

$$3bae+be^2+3ba^2=4a^3+6a^2e+4ae^2+e^3$$

$$3bae+be^2=4a^3-3ba^2+6a^2e+4ae^2+e^3$$

$$4a^3-3ba^2=3bae+be^2-6a^2e-4ae^2-e^3.$$

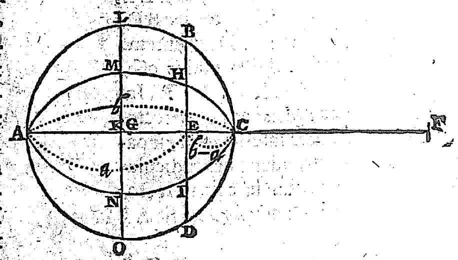
Tandem igitur $4a^3$, æquabitur $3ba^2$, & per hypobibasmum fiet $4a=3b$. Instituto parabolismo, fiet $a=\frac{3}{4}b$. Vnde,

PORISMA.

Diuidatur diameter in quatuor partes æquales, quarum tres constituent, partem vnam; reliqua verò constituet partem alteram; & hoc modo rectangulum sub sinu recto, seu semichorda, & sagitta, seu maiori parte diametri erit omnium rectangulorum maximum, quare duplum, nempe sub eadem maiori parte diametri, & chorda erit omnium maximum. In supradictorum tamen declarationem, hæc adnotanda sunt nempe, quod in illa æquatione.

$$\begin{array}{l} ba^3+ba^2e+3bae^2+be^3=ba^3-a^4 \\ \quad -4a^3e \\ \quad -6a^2e^2 \\ \quad -4ae^3 \\ \quad -a^4 \\ \quad -e^4 \end{array}$$

Vt constat, ex vtraque parte extat ba^3-a^4; ob id, si fiat antithesis, transpositione facta eorum, quæ signo $-$ afficiuntur, proueniet æquatio hunc in modum $3bae^2+be^3+3ba^2e=4a^3e+6a^2e^2+4ae^3+e^4$; & instituto parabolismo, fiet æquatio $3bae+be^2+3ba^2=4a^3+6a^2e+4ae^2+e^3$; & per antithesin fiet $3bae+be^2=4a^3-3ba^2+6a^2e+4ae^2+e^3$, & rursus itidem per antithesin fiet $4a^3-3ba^2=3bae+be^2-6a^2e-4ae^2-e^3$. Et quia e, supponitur æquari nihilo, & quod in nihilum ducitur facit nihil; ob id, fiat rursus antithesis, per additionem $-3ba^2$, ex vtraque parte & proueniet $4a^3=3ba^2+3bae+be^2-6a^2e-4ae^2-e^3$; nam vt diximus, nihilum ductum in aliquid, vel contra, nihil facit, atque adeò $3bae+be^2-6a^2e-4ae^2-e^3$ quæ nihil propterea valent, proinde remanebit æquatio $4a^3=3ba^2$; hæc igitur simplex æquatio occurrit, atque adeò inde colligitur facto parabolismo ipsius a, valorem esse $\frac{3}{4}b$, & illud quod supra posuimus Porisma colligitur.



Illud porrò addendum est, quod non vna est linea BE, quæ ducta in AE, facit maximum rectangulum, omnium eorum scilicet, quæ fieri possunt à segmento diametri AC, in semiordinatim applicatam; atque adeò nec etiam vnicam esse BD, quæ ducta in prædictum segmentum, facit maximum rectangulum; sed si descripta sit ellipsis, circa AC, quemadmodum AHCI, adhuc rectangulum sub HE, & AE, est omnium maximum, quæ fieri possunt à semiordinatim applicata in segmentum eiusdem AC, atque adeò, & eius duplum, nempe sub HI, & AE, est omnium maximum, quæ sub ordinatim applicata, & segmento eiusdem AC.

Hoc autem hunc in modum ostendemus; Quoniam rectangulum abs BE, in AE, ad quodcunque aliud, factum ex semiordinatim applicata in circulo, in diametri segmentum, proportionem habet maioris inæqualitatis, vt paulò antea demonstratum fuit; eadem autem est proportio rectanguli sub HE, & AE, ad quodlibet aliud factum à semiordinatim applicata, in diametri segmentum; ergo etiam rectangulum sub HE, & AE, est omnium maximum.

Quod autem rectangulum sub HE, & AE, ad quodlibet aliud, sensu iam dicto, proportionem habeat maioris inæqualitatis, sic ostendemus: Eadem est proportio rectanguli sub BE, & AE, ad quodlibet aliud à semiordinatim applicata circuli in segmentum diametri, quæ est rectanguli sub HE, & AE, ad quodlibet aliud à semiordinatim applicata ellipseos in idem segmentum diametri; sed in circulo proportio est maioris inæqualitatis; ergo etiam in ellipsi.

Quod verò eadem sit proportio, sic ostenditur; sumatur quoduis punctum K, in diametro, & per illud agatur ordinatim applicata LKO, occurrens ellipsios perimetro in MN; Quoniam igitur est [a], vt rectangulum AEC, ad rectangulum AKC, ita quadratum EH, ad quadratum KM; vt verò rectangulum AEC, ad rectangulum AKC, ita quadratum EB, ad quadratum KL; ob id vt quadratum EB, ad quadratum KL, ita quadratum EH, ad quadratum KM; quare vt EH, ad KM, ita EB, ad KL; & permutando vt EH, ad EB, ita KM, ad KL, ergo [b] vt rectangulum AEH, ad rectangulum AEB, ita rectangulum AKM, ad rectangulum AKL; quare permutando vt rectangulum AEH, ad rectangulum AKM, ita rectangulum AEB, ad rectangulum AKL; seu vt AEB, rectangulum, ad rectangulum AKL, ita rectangulum AEH, ad rectangulum AKM; & quia

[a] 21 pr. Coni. Apoll.

[b] pri. 6. Elem.

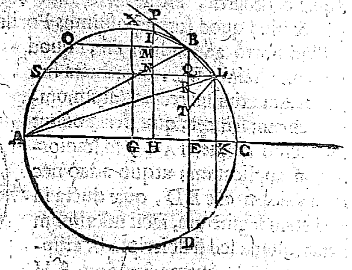
quia ita se res habet de alijs quibuscunque rectangulis, dummodò antecedentia rectangula eiusdem sint altitudinis, item eiusdem etiam altitudinis sint consequentia rectangula.

Quæ autem diximus de rectangulis à semiordinatim applicatis in sibi respondentia diametri segmenta, eadem quoque intelligenda sunt de rectangulis ab ordinatim applicatis in eadem diametri segmenta.

Imò illud itidem accedet, quod rectangulum ab aggregato semiordinatarum, quarum vna ad circulum, alia ad ellipsim pertinet, in diametri segmentum est maximum; vnde rectangulum ab H D, in A E, omnium est maximum. Vt enim rectangulum A E H, ad quodlibet aliud in ellipsi proportionem habet maioris inæqualitatis, & rectangulum A E D, ad quodlibet aliud in circulo proportionem habet maioris inæqualitatis, ita rectangulum sub H D, & A E, ad quodlibet aliud in Figura A M H C D O, proportionem habebit maioris inæqualitatis; vnde est maximum.

Hinc etiam sequitur rectangulum sub H B, & A E, omnium esse maximum; non dissimili enim discursu concludetur; maximum, inquam, omnium, quæ fieri possunt sub diametri segmento, & differentia inter ordinatim applicatas, quarum vna ad circulum, alia ad ellipsim pertinet.

Cæterùm Geometricè, quod initio propositum fuit, sic ostendemus præmissa Analysi. Sit rectangulum A E B, itaut E B, sit dimidium totius B D, subtendentis arcum B C D, trientem totius peripheriæ. Dico maius esse alio quocunque A H I, vel A K L. Intelligatur ducta B M, ad angulos rectos ipsi H I, quæ ducta intelligenda est parallela ipsi E B, atque adeò perpendicularis diametro A C, cum hæc sit ad rectos angulos cum B D; & deinde acta sit A B, item I B.



RESOLVTIO.

Quoniam igitur rectangulum sub A E, & E B, maius est rectangulo sub A H, & H I, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem, quam H I, ad E B; hoc est B E, ad H N; seu H M, ad H N; maiorem habebit rationem, quàm H I, ad E B, seu H I, ad H M. Quod ita se habet. Sunt enim tres rectæ H I, H M, H N, ita vt maior sit excessus rectæ H M, supra H N, quàm H I, supra H M. Quod sic ostendetur. Intelligatur B M, protracta ad O, erit quidem O B, subtendens sextam partem totius peripheriæ, cum B D, subtendat trientem; est enim O B, parallela ipsi A C, quæ cum B D facit in E, angulos rectos; Quare arcus O B, est æqualis arcui A O; sed O I, est minor, quàm O B; ergo minor, quàm A O; quare angulus O B I, minor erit angulo A B O, seu angulus M B I, minor erit angulo M B N; est autem angulus I M B, æqualis angulo N M B; est enim vterque rectus, & latus M B, vtrique triangulo commune; ergo, vt mox ostendemus, latus M I, erit minus latere M N.

At verò, si latus B M, commune fuerit vtrique triangulo, angulus B M I, fuerit æqualis angulo B M N, & angulus M B I, fuerit minor angulo M B N, latus M I, debere minus esse latere M N, sic ostenditur.

Ad punctum B, intelligatur factus angulus M B P, æqualis angulo M B N; & recta M I, protracta sit in P. Quoniam ergo in duobus triangulis P M B, N M B, duo anguli P M B, P B M, æquales sunt duobus N M B, N B M, vterque vtrique, & adiacent æqualibus lateribus, imo vni communi M B; ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia erunt; ob id latus M P, æquabitur lateri M N; sed M I, minus est latere M P; ergo M I, minus erit latere M N.

COMPOSITIO.

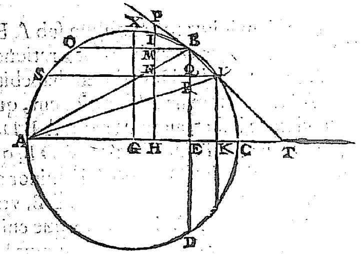
Quoniam igitur H M, ad H N, maiorem habet rationem, quam H I, ad H M, ergo B E, ad H N, maiorem habebit rationem, quam H I, ad H M: sed vt E B, ad H N, ita A E, ad A H, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm H I, ad H M, seu ad E B, quare rectangulum sub A E, & E B, maius erit rectangulo sub A H, & H I. Quod oportebat ostendere.

Non dissimiliter procedendum, cum punctum I, fuerit in apice quadrantis; at si fuerit inter quadrantis apicem vt punctum O, vel inter A, & O, &c. manifestum est rectangulum semper esse minus, quàm quod sub A G, & sub perpendiculari ex G, ad quadrantis apicem; ergo multò magis minus erit rectangulo sub A E, & E B.

Quod si punctum I, caderet inter B, C, vt in L, sic procedendum.

RESOLVTIO.

Quoniam igitur rectangulum sub A E, & E B, maius est rectangulo sub A K, & K L, seu rectangulum sub A K, & K L, minus est rectangulo sub A E, & E B; ergo B E, ad K L, maiorem habebit [a] rationem, quàm A K, ad A E; Quod ita se habet; Nam Intelligatur producta B L, ad partes L, ita vt occurrat diametro productæ in T. Quoniam igitur arcus A D, est triens circumferentiæ, erit æqualis arcui D C B, sed D C B, est maior arcu D C L, ergo arcus A D, maior erit arcu D C L, ergo angulus A B D, maior erit angulo D B L; hoc est angulus A B E, maior erit angulo E B T; est autem angulus A E B, æqualis angulo T E B; vterque enim est rectus; latus verò E B, commune est vtrique triangulo; ergo basis A E, maior erit base E T; vt mox constabit; ergo A E, multo maior erit, quam K T, ergo E K, ad K T, maiorem habebit rationem, quàm ad A E; ergo componendo E T ad K T, seu E B, ad K L, maiorem habebit rationem, quàm A K, ad A E; Quod oportebat, &c.



[a] 16. sept. Pap.

COMPOSITIO.

Quoniam igitur maior est proportio rectæ E B, ad rectam K L, quàm A K, ad A E, ergo rectangulum sub E B, & A E, maius erit rectangulo sub A K, & K L.

Vel quia E B, ad K L, maiorem habet rationem, quam A K, ad A E; ergo A E, ad A K, maiorem habebit [a] rationem, quam K L, ad E B; quare rectangulum sub A E, & E B, maius erit rectangulo sub A K, & K L. Quod erat operæ pretium ostendere. [a] 26. quinti.

Quod si rectangulum sub A E, E B, est maximum, etiam eius duplum, nempè sub A E, B D, maximum erit.

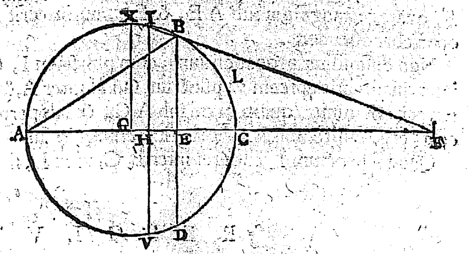
Idem tamen paulò aliter, si præmissum sit, quod etiam supra adhibitum est.

LEMMA.

Si duo triangula habuerint latus lateri æquale, alter autem adiacentium angulorum, in vno, sit æqualis alteri adiacentium in altero, reliquus adiacentium in primo, sit maior reliquo adiacentium in secundo, etiam latus maiori angulo oppositum, maius erit latere quod minori angulo opponitur.

Sed id elementare est. Hoc præmisso.

Intelligatur ducta I B, quæ ad partes B, protracta occurrat diametro productæ (occurret autem vt patet ex Elementis) ad partes C, nempè in F; & protrahatur I H, ad V.



RESOLVTIO.

a 16. 7. Pappi. b 19. quinti. Quoniam igitur rectangulum sub A E, & E B, maius est rectangulo sub A H, H I, ergo A E, ad A H, maiorem habebit[a] rationem quàm H I, ad E B, sed vt H I, ad E B, ita HF, ad E F, ergo A E, ad A H, maiorem habebit rationem quàm H F, ad EF, ergo[b] diuidendo HE, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm H E, ad E F; vnde E F, maior erit, quàm AH. Quod ita se habet, angulus enim A B D, insistit arcui A D, trienti totius peripheriæ at verò angulus V I B, insistit arcui V D B, qui maior est triente, vtpote maior arcu D C B, est igitur angulus A B D, seu A B E, minor angulo V I B, seu D B F, seu E B F. In duobus igitur triangulis A B E, E B F, latus E B, vtrique triangulo commune est, angulus autem A E B, æqualis est angulo F E B, vterque enim est rectus, angulus verò E B F, maior est angulo E B A, ergo ex eo, quod præmisimus Lemmate, latus E F, maius erit latere AE, ergo multo maius recta AH.

COMPOSITIO.

c 18. quinti. d 16. 7. Pappi. Quoniam igitur E F, maior est, quàm A H, recta H E, ad A H, maiorem habebit rationem, quàm ad EF; quare[c] componendo AE, ad A H, maiorem habebit rationem quàm H F. ad E F; hoc est H I, ad E B. Proinde rectangulum sub AE, & EB, maius erit[d] rectangulo sub A H, & H I.

Hæc autem, cùm punctum I, ceciderit inter B, X; vel in ipso puncto X, quadrantis apice. At verò si cadat in quadrante A X, inter A, X, manifestum est, vt superiùs in alia resolutione ostendimus, rectangulũm factum à recta cadente ex a ssumpto puncto perpendiculari ad diametrum, in segmentum diametri inter A, & punctum, vbi cadit perpendicularis, minus esse rectangulo sub A E, E B.

Quod si punctum I, cadat inter B, C, vt in L, non dissimili discursu, ac supra concludetur rectangulum sub A E, E B, maius esse quocunque ex rectangulis factis, à perpendiculari, ex puncto assumpto in arcu sextante B C, in diametrum, in diametri segmentum, inter A, & punctum, vbi perpendicularis cadit, &c.

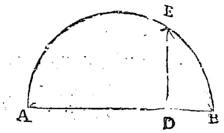
Punctum sit e. g. L, ex L, cadat perpendicularis in diametrum, & ex B, per L, intelligatur ducta recta occurrẽs diametro productæ, & procedatur non absimili modo ac prius.

PROPOSITIO XIII.

Reperire maximum rectangulum, comprehensum sub media, & maiori extrema trium proportionalium.

Sit

Sit A B, supra quam descriptus sit semicirculus A E B, at vero A B, secta sit in D, itaut ex D, erecta sit perpendicularis D E, erunt quidem A D, D E, D B, tres proportionales; quarum media D E.



Supponamus autem rectangulum A D E, esse maximum, nempe contentum sub maiori extrema AD, & media D E.

Sit A B, æqualis b, & A D, æqualis a, ergo D B, erit $b - a$ rectangulum sub his est $ba - a^2$, quare $ba - a^2$, erit quadratũ ex DE, itaq; ipsa DE, erit ℞ $(ba - a^2)$ ducatur autẽ a, nempe A D, in ℞ $(b^2 a - a^2)$ scilicet D E, & prouenier ℞ $(ba^3 - a^4)$ tantum igitur erit rectangulum sub A D, & D E.

Nunc supponendum A D, esse $a + e$, itaque D B, erit $b - a - e$, rectangulum sub his est $ba + be - a^2 - 2ae - e^2$, itaque eius latus, puta ℞ $(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ æquabitur D E, si igitur ℞ $(ba + be - a^2 - 2ae - e^2)$ ducatur in $a + e$ proueniet id quod æquabitur ℞ $(ba^3 - a^4)$ id verò, quod prouenit est ℞ $(ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - a^4 - e^4)$ Itaque $ba^3 + 3ba^2e + 3bae^2 + be^3 - 4a^3e - 6a^2e^2 - 4ae^3 - a^4 - e^4$, est quod æquabitur $ba^3 - a^4$, & per antithesin, aliaq; præcepta adhibita in superiori Problemate, peruenietur ad hanc æquationem $a = \frac{3}{4} b$. Hinc.

PORISMA.

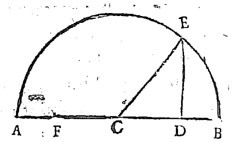
Maior extrema è tribus proportionalibus, debet esse æqualis tribus quartis partibus aggregati extremarum, si rectangulum sub maiori extrema & media, debet esse maximum.

Cæterum ridiculum foret inquirere maximum rectangulum sub media, & minori extrema, è tribus proportionalibus; dum enim crescit minor extrema, crescit & media, quo ad fiant tres rectæ æquales, vnde nequit assignari rectangulum sub minori extrema, & media, ita vt illud maximum sit omnium, quod cuique perspectum, ac manifestum esse potest.

PROPOSITIO XIV.

Reperire maximum rectangulum comprehensum, sub media, & differentia extremarum trium proportionalium.

Supponamus super A B, descriptum esse semicirculum A E B. Sit autem C, centrum, atque segmentum C D, æquale sit segmento C F; segmentorum verò A D, D B, differentia est F D, at si ex D, erecta fuerit perpendicularis D E, erit ipsa D E, media proportionalis inter A D, D B.



Supponamus rectangulum F D E, esse maximum; Quæritur punctum D, seu quam relationem habeat AD, ad DB, vel FD, ad D B, &c. Sit b, æqualis AC, vel C B, at verò a, sit æqualis C D, vel FC, igitur $b + a$ æquabitur AD, & $b - a$, æquabitur DB, & $2a$, æquabitur F D. Cum igitur AD, æquetur $b + a$, & DB, æquetur $b - a$, igitur ducatur $b + a$ in $b - a$, vt fiat $b^2 - a^2$, differentia enim laterum ducta in eorundem aggregatum facit differentiam quadratorum, itaque quadratum ex DE, erit $b^2 - a^2$, quare DE, æquabitur ℞ $(b^2 - a^2)$ & quia F D, erat $2a$, ducatur $2a$ in ℞ $(b^2 - a^2)$ & proueniet $2a$ ℞ $(b^2 - a^2)$ seu ℞ $(4b^2a^2 - 4a^4)$ seu quod idem est 4, ℞, $b^2 - a^2$, vtamur autem modo ℞ $(4b^2a^2 - a^4)$.

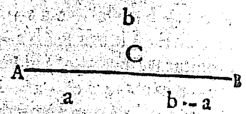
Supponamus nunc e, æquari o. Itaque $a + e$, æquabitur C D, vel CF, proinde $b + a + e$, æquabitur AD, & $b - a - e$, æquabitur DB, insuper $2a + 2e$, æquabitur FD, rectangulum igitur AD B, est $b^2 - a^2 - 2ae - e^2$, & E D, erit ℞ $(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)$ rectangulum verô sub FD, & ED, erit $4b^2a^2 - 4a^4 + 8b^2ae + 4b^2e^2 - 16a^3e - 24a^2e^2 - 16ae^3 - 4e^4$, quod æquabitur $4b^2a^2 - 4a^4$, & per antithesin fiet $8b^2ae + 4b^2e^2 = 16a^3e + 24a^2e^2 + 16ae^3 - 4e^4$, & per hypobibasmũ $8b^2a + 4b^2e = 16a^3 + 24a^2e + 16ae^2 - 4e^3$. Aboletis membris in quibus adest nota e, seruatisque cæteris, fiet æquatio $8b^2a = 16a^3$ & facto parabolismo omnibus nempe applicatis ad 8, proueniet æquatio $b^2a = 2a^3$, & per hypobibasmum fiet $b^2 = 2a^2$, ergo quod idem est $2a^2 = b^2$, & per parabolismum fiet $a^2 = \frac{1}{2} b^2$, quamobrem a, æquabitur ℞ $\frac{1}{2} b^2$. Hinc.

PORISMA.

Dimidium differentiæ extremarum, æquatur ei, quod potest dimidium quadrati ex dimidio aggregati earundem extremarum; quando rectangulum sub media, & differentia extrema unum est omnium maximum, &c.

PROPOSITIO XV.

Datum latus diuidere in duo segmenta, vt ex ijs quadratorum aggregatum, sit omnium minimum.



Datum sit latus A B, & oporteat facere quod imperatum est. Latus propositum supponatur b, sint autem segmenta A C, CB, ita vt quadratorum aggregatum ex ipsis, sit omnium minimum. Oporteat reperire punctum C, segmentum AC, esto a, ergo segmentum B C, erit $b - a$; quadratum autem ipsius a, est a^2, & quadratum ex $b - a$ est $b^2 - 2ba + a^2$, quadratorum aggregatum est $b^2 - 2ba + 2a^2$, hoc autem seruandum est, vtpotè illud, cum quo instituenda est comparatio.

Supponamus e, æquari o; atque A C, esse $a + e$; at vero G B, esse $b - a - e$, harum partium quadrata sunt ipsius quidem $a + e$, est $a^2 + 2ae + e^2$, & ipsius $b - a - e$, est $b^2 - 2ba - 2be + a^2 + 2ae + e^2$; aggregatum horum est $b^2 - 2ba - 2be + 2a^2 + 4ae + 2e^2$; quamobrem erit æquatio $b^2 - 2ba - 2be + 2a^2 + 4ae + 2e^2 = b^2 - 2ba + 2a^2$; & per antithesin $4ae + 2e^2 = 2be$, omnibusque applicatis ad e, fiet $4a + 2e = 2b$; quo circa erit $4a = 2b$; atque adeò $2a$, æquabuntur b. Hinc.

PORISMA.

Latus diuidendum est dimidium partis quæsitæ quocirca, si latus bifariam diuidatur, aggregatum quadratorum ex ipsis partibus, est omnium minimum.

COROLLARIVM.

Ex his facile intelligis, minimum aggregatum quadratorum à partibus lineæ diuisæ, duplum esse maximi rectanguli, sub partibus eiusdem lineæ.

Ostensum est enim supra rectangulum maximum sub segmentis dati lateris illud esse, quod sub æqualibus lateribus continetur, atque adeò est quadratum à dimidio datæ lateris, at vero nunc constat minimum aggregatum quadratorum à segmentis dati lateris illud esse, quod constat à quadratis partium, seu partium quarum vtraque est dimidium totius lateris diuidendi; hoc autem aggregatum est duplum quadrati à dimidio, seu rectanguli maximi, ergo minimum quadratorum aggregatum est duplum rectanguli maximi, &c.

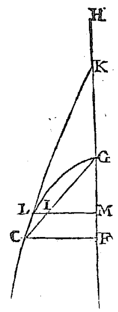
Extat iam in Conicis demonstratum.

PROPOSITIO XVI.

Si parabolen recta linea contingat conueniens cum diametro extra sectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipsam, & contingentem interijcitur; & in locum qui est inter contingentem, & sectionem alia recta linea non cadet.

In autem sic assequemur.

Data sit semiparabola C G, cuius diameter sit F G, vt in perimetro seu linea parabolica C G, datum sit punctum C, sit autem recta C L K, recta, quæ tangat parabolen in C, puncto; recta verò F G, sit protracta ad partes G. Propositum sit inquirere punctum K, vbi tangens occurrit productæ diametro in K. Oportet igitur inquirere G K, relatam ad G F, quam scilicet rationem habeat.



Ducta sit C F, ordinatim ad diametrum F G, quæ data erit, sumaturque punctum L, in C k, arbitrarium, agaturque LIM, parallela ipsi C F, manifestum est LM, maiorem esse, quàm IM, Triangulum CFk, simile est triangulo LMK; est autem I, punctum, intersectio lineæ LM, cum linea parabolica C I G, erit igitur ob paraboles naturam, vt F G, ad M G, ita quadratum CF, ad quadratum IM, sed quadratum CF, ad quadratum IM, maiorem habet rationem, quàm quadratum CF, ad quadratum LM, & quadratum CF, ad quad. LM, est ob similitudinem triangulorum, vt quadratum F K, ad quadratum M K, ergo FG, ad MG, maiorem habet rationem, quàm quadratum FK, ad quadratum M K. His præhabitis.

Supponamus F G, esse b, at F K, esto a. Supponamus deinde e, æquari FM, seu o; erit quidem MG, idem quod $b - e$, & Mk, erit $a - e$; vt autem F G, ad M G, ita quadratum F K, ad quadratum MK, proinde vt b ad $b - e$, ita a^2 ad $a^2 - 2ae + e^2$, ergo $ba^2 - 2bae + be^2$ æquabitur $ba^2 - ea^2$, & per antithesin fiet $be^2 + ea^2 = 2bae$ instituto parabolismo, fiet æquatio $be + a^2 = 2ba$; est autem be, idem quod o; ob id fiet æquatio $a^2 = 2ba$, & per hypobibasmum erit $a = 2b$. Itaque F K, quæ ponebatur a, æquatur duplę F G, quæ ponebatur b, vnde FG, GK, sunt inter se æquales; quod contendit Apollonius propositione supra citata. Hinc.

PORISMA.

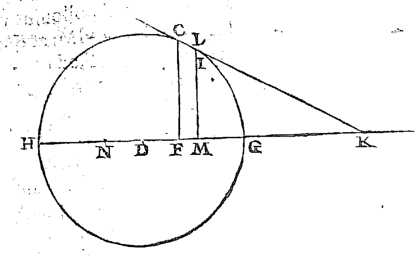
In omni parabola recta linea contingens conueniens cum diametro extra sectionem, quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipsam, & contingentem interijcitur & in locum, qui est inter contingentem & sectionem, alia recta linea non cadet.

Demonstratio est in Conicis Elementis.

PROPOSITIO XVII.

Si hyperbolen, vel ellipsim, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum transuerso figuræ latere, & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur erit vt linea quæ interijcitur inter contingentem, & terminum trasuersi lateris ad interiectam inter eandem, & alterum lateris terminum, ita linea quæ est inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam quæ est inter eandem, & alterum terminum; adeò vt continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent: & in locum, qui inter contingentem, & sectionem interijcitur altera recta linea non cadet.

Methodo autem superiori hunc in modum colligere licebit relationem rectæ Fk, ad alias quantitates.



Supponamus H G, esse rectam supra quam centro D, descriptus sit semicirculus H C G, itaut diameter sit H G. Sit autem C, punctum in peripheria vbi recta C K, tangit circulum ipsum, occurrens diametro protractæ in K. Quod autem quæritur est punctum k. Ducta sit CF, ordinatim ad diametrum, at verò in recta Ck, sit assumptum pro arbitrio punctum L, sitque ducta linea LIM, parallela ipsi CF; est autem LM, maior, quàm IM, triangulum verò C F K, simile est triangulo L M k; sunt enim æquiangula. At verò, vt ostendit Apollonius in Conicis Elementis vt est rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, ita quadratum CF, ad quadratum IM, at verò quadratum C F, ad quadratum IM, maiorem habet rationem, quàm quadratum C F, ad quadratum LM, & vt quadratum CF, ad quadratum LM, ita est quadratum FK, ad qua-

quadratum M K, ergo rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, maiorem habebit rationem, quàm quadratum F K, ad quadratum M K.

Supponamus b æquari F G, & d, æquari H F; at verò a æquari F k; sed e, æquari F M, & o, seu nihilo; erit igitur H M, idem quod d † e, at M G, erit b -- e; sed M K, erit a -- e, quare vt rectangulum H F G, ad rectangulum H M G, ita quadratum F k, ad quadratum M K, itaque vt b d, ad -- e d -- e^2 † b d † b e, ita a^2, ad a^2 -- 2 a e † e^2, proinde fiet æquatio b d a^2 -- 2 a e b d ⁜ e^2 b d ⇌ -- e d a^2 -- e a^2 † b d a^2 † b e a^2; & per antithesin fiet -- 2 a e b d ⁜ e^2 b d ⇌ -- e d a^2 -- e a^2 ⁜ b e a^2, & per hypobibasmum -- 2 a b d † e b d ⇌ -- d a^2 -- e a^2 † b a^2 est autem e, æqualis o, seu nihilo, ex hypothesi, quare -- 2 a b d ⇌ -- d a^2 ⁜ b a^2, & per hypobibasmum fiet -- 2 b d ⇌ † b a -- d a, & per antithesin d a -- b a ⇌ 2 b d quare per parabolismum fiet a ⇌ $\frac{2bd}{d-b}$. Itaque F k, erit $\frac{2bd}{d-b}$, nempe quantitas orta ex applicatione dupli rectanguli b d, ad differentiam inter d & b, hoc est dupli rectanguli H F G, ad differentiam inter H F, & F G. Itaque erit, vt d -- b, ad $\mathbb{R}$ 2 b d, ita hoc ad a, seu vt d -- b, ad d ita 2 b, ad a. Hinc,

Est enim E M æqualis o.

PORISMA.

In omni Circulo, vt est differentia segmentorum diametri ad segmentum maius, ita duplum segmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam à qua diametri segmenta ipsa designantur, & punctum occurrens, ipsius tangentis, cum diametro protracta.

In omni igitur circulo tangens occurrens diametro protractæ, ita se habet, vt si secetur F N, æqualis F G, erit H N, excessus quo H F, superat F G, atque ut H N, ad H F, ita N G ad F K.

PROPOSITIO XVIII.

Ad ellipsim quod attinet, non dissimili argumentatione procedendum.

Data sit ellipsis circa diametrum H G, sit autem in H C G, punctum C, in quo recta CLK, tangit ellipsim occurrens diametro protractæ in K. Quæsitum est punctum K, in quo HG K, cum C K, se mutuò intersecant.

Ducta sit CF, ordinatim ad diametrum, at in CK, intelligatur acceptum quoduis punctum L, ductaque sit LIM parallela ipsi CF; est autem LM, maior ipsa I M; totum enim est sua parte maius; quoniam vero L M, parallela est rectæ C F, erit triangulum CFK, simile triangulo LMK; est autem ex ijs quæ demonstrat Apollonius vt rectangulum HFG, ad rectangulum HMG, ita quadratum C F, ad quadratum IM; at quadratum C F, ad quadratum IM; maiorem habet rationem, quàm quadratum CF, ad quadratum LM, vt verò quadratum CF, ad quadratum LM, ita quadratum F K, ad quadratum M K; propterea rectangulum H F G, ad rectangulum HMG, maiorem habebit rationem, quàm quadr. FK, ad quadr. M K.

Supponendum est autem FG, esse b, at HF, esse d; item FK, esse a. Sit autem e, æqualis FM, atque o, seu nihilo; erit quidem HM, æqualis d † e, & MG, erit b -- e, vt MK, erit a -- e, quare rectangulum H F G, ad rectangulum HMG, vt quadratum FK, ad quadratum M K, proinde, vt b d ad -- e d -- e^2 † b d † b e, ita a^2, ad a^2 -- 2 a e † e^2; atque adeò b d e a^2 - 2 a e b d † e^2 b d, æquab. - e d a^2 - e^2 a^2 † b d a^2 † b e a^2, &c. & per hypobibasmũ, fiet -- 2 a b d † e b d ⇌ -- d a^2 -- e a^2 † b a^2; cumque e, æquetur o, seu nihilo erit -- 2 a b d ⇌ -- d a^2 † b a^2, & per hypobibasmum, fiet -- 2 b d ⇌ † b a -- d a, & per antithesin, fiet d a -- b a ⇌ 2 b d; Instituto parabolismo fiet a ⇌ $\frac{2bd}{d-b}$. Igitur fiet analogismus, vt in circulo dictum fuit, vt d -- b, ad d, ita 2 b, ad a. Itaque,

Est enim FM æqualis o.

PO-

PORISMA.

In omni ellipsi, vt est differentia segmentorum diametri, ad segmentum maius, ita duplum segmentum minus, ad interceptam inter ordinatim ductam, à qua segmenta ipsa designantur, & punctum occursus ipsius tangentis cum diametro protracta.

Sequitur de Hyperbole; sed de hoc alibi.

Mihi autem hactenus allata meditanti, fama retulit præclarissimum Michael Angelum Riccium, omnigena virtute cumulatissimum, ætatisque nostræ splendorem, ac decus, Romæ, vt cætera, ita hæc summa cum laude tractasse, proprioque marte in his, quamplurima reperisse, adeò quidem eximia, vt nihil supra; quamobrem animum statim ad eum inuisendum appuli, ratus, si eum alloquerer, multa, & quidem sublimia, non dum alijs perspecta me cognosciturum; Romam propterea festinans petij, ac eum adiens, plenum humanitatis æquè, ac doctrinæ cognoui; post multa denique protuli, *Auxit præsentia famam*; tanta siquidem est qua pollet ingenij uis, atque solertia, vt ad veritatis indagationem, Naturæ non incolsultò diceres illum Interpretem. Cùm autem & de rebus Physicis, & Mathematicis, plura inter loquendum attulisset in medium, denique Lucubrationes præstantissimas aperuit, ac inter cætera generalem rationem Effectionum Geometricarum, pro quocunque Problematum genere, vnà cum eorumdem Problematum determinandi ratione. Hæc cum eruditissimis uiris Anglis visa sint digna prælo, propterea annis proximè anteactis Typis commissa sunt, quorum imitatione, ad communem vtilitatem, hic tanti Ingenij nobilissimum fætum subijciam, vnde, vt ex vngue Leonem, eius perspicacitatem, ac eruditionem summam addisces.

Michael Angeli Riccij laudes.

DEFINITIONES.

1 Potestatem quamlibet, eiusque radicem, voco dignitatem.

2 Si Dignitas in Dignitatem ducatur, vt A 2, in B 3, fiet productũ A 2 in B 3; cui producto illud simile dicimus, quod gignitur ex dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypothesi, productum E 2 in C 3, ex quadrato & cubo, simile est producto A 2 in B 3.

3 Homogenea producta sunt, quæ ad eundem gradum pertinent; vt duo rectangula, quippè quæ ad secundum gradum pertinent; & duo solida, quæ ad tertium.

4 Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros, seu æquales, seu inæquales, vel numerum & vnitatem, vel duas vnitates. Terminos inæquales appello duos inæquales, vel numerum, & vnitatem. Terminos autem æquales, duos æquales numeros, vel duas vnitates.

5 Productum in linea fieri secundum terminos datos, aut positos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes sunt ipsi termini dati, vel positi; radices verò segmenta illius rectæ lineæ sectæ in proportione terminorum eorumdem.

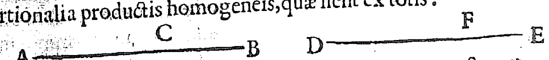
Sit verbi causa, quæpiam recta linea, cuius maius segmentum ad minus sit in ratione 3 ad 2; productum ex cubo segmenti maioris in quadratum minoris erit factum in linea data secundum terminos positos 3, & 2; quia segmenta quæ sunt dignitatum radices habent rationem numeri 3 ad 2, & exponentes earumdem dignitatum sunt etiam 3, & 2.

Rursus esto quemadmodum segmentum maius ad minus eiusdem lineæ, sic 3 ad 1, productum ex cubo maioris segmenti in segmentum ipsum minus, erit productum in linea factum secundum terminos positos, numerum & vnitatem. Ita, A 3 in B 1 [si A vocetur maius segmentum, B verò, minus] est productum factum in linea A † B secundum terminos 3, & vnitatem, quia radices A & B sic sunt, vt est numerus 3 ad vnitatem; & dignitatis A 3 exponens est, 3, numerus datus; dignitatis B 1 exponens est, vnitas, item data.

Lemma primum.

Si duæ rectæ in eadem ratione secentur, producta similia facta ex segmentis, tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis, quæ fient ex totis.

Sint A B, D E, rectæ, in punctis C, & F, ita sectæ, vt



ctæ, vt quam rationem A C ad C B habet, eandem habeat D F ad F E, & fiant ex illarum ſegmentis producta A C 2 in C B 3, & D F 2 in F E 3, quæ ſunt ſimilia per ſecundam definitionem; iiſque homogenea producta fiant ex totis A B, D E, nimirum A B 5, D E 5, per tertiam definitionem. Dico A C 2 in C B 3 eandem rationem habere ad A B 5, ac D F 2 in FE 3 ad DE 5. Quia rationes ex quibus ratio producti AC 2 in CB 3 ad AB 5 componitur, eædem ſunt ac componentes rationem producti DF 2 in FE 3 ad DE 5; ob ſectionem linearum proportionalem, & inde proportionales dignitates ex quibus producta illa reſultant. Quod, &c.

Lemma ſecundum.

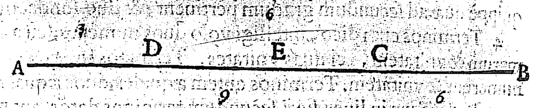
Iiſdem poſitis, Dico, ſi AC 2 in CB 3 fuerit maximum omnium ſimilium productorum ex binis ſegmentis rectæ A B, etiam D F 2 in F E 3 fore maximum productorum ſimilium ex binis ſegmentis rectæ DE, tanquam ex radicibus.

Singulis enim productis ex ſegmentis rectæ DE alia reſpondent orta ex ſegmentis rectę AB in eadem proportione ſectæ; & illa ad homogeneum ſuum DE 5 eandem rationem habent, atque iſta ad ſuum AB 5, ex primo Lemmate: Ratio quidem AC 2 in C B 3 ad AB 5, ex hypotheſi, eſt eadem, ac ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5: cæterorum verò productorum ex ſegmentis ipſius DE ad DE 5, eadem eſt atque ratio productorum ſibi reſpondentium, quæ fiunt ex ſegmentis rectæ AB, ad AB 5. Cùm igitur ratio AC 2 in CB 3 [quod maximum eſſe ponitur] ad AB 5 ſit maior, per Octauam quinti Element. ratione cæterorum productorum ſibi ſimilium ad AB 5; maior etiam erit ratio DF 2 in FE 3 ad DE 5, quàm ratio cæterorum ſimilium productorum ex ſegmentis rectæ D E ad D E 5; ac proinde ipſum D F 2 in FE 3 per decimam quinti Elem. eſt maximum. Quod, &c.

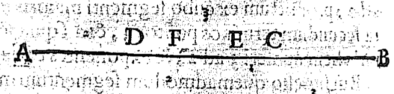
Lemma tertium.

Si data recta linea ſecetur in ratione terminorum inæqualium, & diuidendo, fiat ſegmẽtorum differentia ad minus ſegmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; hæc inuenta proportionalitas, vel ipſa erit proportionalitatis æqualitatis, vel alia, in quam incidemus, iterum diuidendo, & ſic deinceps; & in ea terminorum differentia æquabitur minori termino, & differentia ſegmentorum ſegmento minori.

Eſto AC ad CB, vt 9 ad 6, & A D differentia ſegmentorum AC, CB: erit diuidendo, 3 ad 6, vt A D, ad C B, vel ad ſegmentum ſibi æquale, D C: Quoniam verò hæc proportio non eſt proportio æqualitatis, fiat D E differentia ſegmentorum AD, & DC; 3, differentia numerorum 6 & 3; & diuidendo, erit, vt 3 ad 3, ſic DE ad AD, proportio æqualitatis.



Rurſus A C ſit ad C B, vt 5 ad 3; & AD ſegmentorum differentia; diuidendo erit, AD ad CB, ſeu ad ſibi æquale ſegmentum DC, vt 2 ad 3. Et iterum diuidendo [ſegmentorum A D & D C, eſto, differentia, E C,] 1 ad 2 vt EC ad AD ſeu DE; & tertiò [facta FE terminorum D E & E C differentia] diuidendo inueniemus, vt 1 ad 1, ita F E ad E C. Quod, &c.



Ratio Lemmatis eſt, quod duorum quorumcumque numerorum differentia, vel differentia numeri & vnitatis, ſemper eſt numerus aut vnitas, vt per ſe patet: & nos diuidendo, ſemel atque iterum, ac ſæpius, demimus ſemper minorem terminum diuiſæ proportionalitatis qui eſt numerus vel unitas, de maiori termino ſeu numero, vtimurquè deinceps reſiduo tantùm [quod eſt eorum terminorum differentia] & comparamus illud cum minori termino proportionalitatis diuiſæ: at non poſſumus ſic demendo progredi in infinitum, quia vnitates in terminis ſunt finitæ, ſed exhauritur tandem omnis differentia, reſiduumq; maioris termini proportionalitatis diuiſæ æquatur termino minori. Ita fit proportio æqualitatis, in qua vnitas ad vnitatem, vel numerus ad ſibi æqualem numerum, eſt vt ſegmentum

mentum ad aliud æquale ſegmentum. Quod oſtendere oportebat.

Quod ſi ab ea proportione æqualitatis, in qua deſitum eſt, rurſus incipiamus, Dico nos componendo gradatim, venturos per veſtigia diuiſionis ad terminos primæ proportionalitatis, in qua ſegmenta datæ lineæ erant in ratione inæqualium terminorum. Cuius propoſitionis rationem facilè intelliget Geometra, quem latere non poteſt, in Geometria omnia quæ diuidendo concluduntur, ex contrario conuerti poſſe, & componendo concludi illud ipſum, quod ponebatur ante diuiſionem, vt in quinto Elem. oſtenditur. Exempli gratia, ſit maius ſegmentum datæ rectæ ad minus, vt 2 ad 1. Igitur diuidendo 1 ad 1, eſt vt differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum. Ex hac porrò æqualitatis proportione componendo redimus ad primam proportionem, in qua ſegmenta erant in ratione 2 ad 1. Quod, &c.

Lemma quartum.

Si duo quælibet producta orta ſint ex duabus dignitatibus ductis in aliam communem dignitatem; quam rationem habent illæ duæ dignitates inter ſe, eandem habent duo producta. Sic productum A B 3 in B C 5 eam rationem habet ad productum A B 3 in E F 5, quam habet dignitas BC 5 ad dignitatem EF 5; in quas duas dignitates ducta communis dignitas AB 3 illa producta effecit.

Ex definitione multiplicationis probatur hoc Lemma, quod alij in numeris demonſtrarunt.

Lemma quintum.

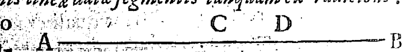
Datis quatuor quãtitatibus, quarũ prima ad ſecundã habeat minorẽ rationẽ, quàm tertia ad quartam, productum quod gignitur ex duabus extremis eſt minus producto ex medijs.

Augeatur prima donec fiant quatuor Geometricè proportionales; tunc prima in quartam ducta efficiet productum æquale producto ex medijs. Igitur productum quod efficiebat ante quàm augeretur, erat productum minus eodem producto ex quantitatibus medijs. Quod, &c.

THEOREMA I.

Productũ in aliqua recta linea factũ ſecundũ poſitos terminos æquales, maximum eſt omniũ ſimilium productorum, quæ fieri poſſunt ex binis lineæ datæ ſegmentis tanquam ex radicibus.

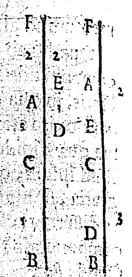
Recta linea AB ſecetur equaliter in puncto C, & ſit AC ad CB vt 3 ad 3 [termini æquales poſiti] Dico productum AC 3 in C B 3; quod fit in linea A B ſecundum poſitos terminos, eſſe omnium ſimilium productorum maximum. Sumpto quolibet alio puncto D, faciamus aliud ſimile productum A D 3, in D B 3. Cùm autem ſint quatuor lineæ Arithmeticè proportionales cum exceſſu C D, nimirum AD, AC, CB, & BD, minor eſt ratio maximæ AD, ad AC, quàm CB ad BD; & triplicata ratio ipſius A D ad A C [ſeu ratio A D 3 ad AC 3] minor eſt, quam triplicata ipſius CB ad BD [ſeu CB 3 ad BD 3] & per quintum Lemma, productũ ex medijs quantitatibus, AC 3, in CB 3, maius eſt producto AD 3 in BD 3 facto ex duabus extremis. Eodem pacto demonſtratur AC 3 in CB 3 eſſe alio quocumque ſimili producto maius, & conſequenter omnium ſimilium maximum. Quod, &c.



THEOREMA II.

Si duo rectæ lineæ ſegmenta fuerint in ratione terminorum inæqualium, & per conſequens, diuidendo ſit, differentia ſegmentorum ad minus ſegmentum, vt differentia terminorum ad minorem terminum; quoties ex dignitate differentiæ ſegmentorum ducta in dignitatem minoris ſegmenti ſit productum maximum, toties ſit etiam maximum ex eadem dignitate minoris ſegmenti ducta in dignitatem maioris; atque ita, ſi dignitates ſegmentorum pro exponentibus habeant terminos poſitos, & dignitas differentiæ, differentiam terminorum.

Sit AB recta linea inæqualiter ſecta in puncto C, & BC ad AC, vt 5 ad 3, qui ſint termini poſiti. Producatur BA in F, donec æquetur F C ipſi CB, & AF erit differentia ſegmentorum BC & AC. Quoniam verò ſegmentum maius B C ſic eſt ad minus C A, vt 5 eſt ad 3, erit diuidendendo AF ad CA, vt eſt 2 ad 3. Nunc fiant duo producta qualia diximus, primum FA 2 in AC 3, ex dignitate ipsius FA, differentiæ segmentorum, ducta in dignitatem minoris segmenti AC. Secundum AC 3 in CB 5, ortum ex eadem dignitate minoris segmenti ducta in dignitatem maioris. Prima dignitas FA 2 habet pro exponente, 2, differentiam datorum terminorum, reliquæ habent 3 & 5, terminos positos, vt imperabatur. Dico, si productum primum est maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ FC [esse autem eiusmodi supponamus], etiam secundum fore productum maximum omnium similium ex binis segmentis rectæ positæ AB.



Sumatur in AB alius punctus præter punctum C, & esto, D; qui accipi à nobis potest infra punctum C, vel supra. In vtroque casu FA, nequit habere eam rationem ad AC, quam habet ad AD, sed maiorem aut minorem habebit, atque adeò FD non est secta in puncto A secundum rationem ipsius FA ad AC; fiat porrò FE ad ED, vt FA ad AC, & productum FE 2 in ED 3, per secundum Lemma, erit maximum [æquè ac productum FA 2 in AC 3] & consequenter maius simili producto FA 2 in AD 3, facto ex segmentis eiusdem rectæ FD. Quod maximum FE 2 in ED 3 habet eandem rationem ad FD 5, dignitatem sibi homogeneam, quam FA 2 in AC 3 ad FC 5, vt ex duobus primis Lemmatibus colligitur; igitur FA 2 in AD 3 [quod diximus esse minus producto FE 2 in ED 3] minorem rationem habet ad FD 5, quam FE 2 in ED 3 ad idem FD 5, seu minorem, quàm FA 2 in AC 3 ad FC 5; & permutando, FA 2 in AD 3 minorem habet rationem ad FA 2 in AC 3 [seu, per Lemma quartum, AD 3 minorem habet rationem ad AC 3] quam FD 5 ad FC 5, & longè minorem, quàm CB 5 ad BD 5. Quippe sunt rectæ DB, CB, FC, & FD, Arithmeticè proportionales cum excessu DC; ac propterea in primo casu FD, maxima, in secundo casu FD, minima est ad FC in minori ratione quàm CB ad DB, & quintuplicata ratio FD ad FC, nempe ratio ipsius FD 5 ad FC 5, est minor quintuplicata ratione CB ad DB, seu CB 5 ad DB 5.

Igitur cum quatuor quantitatum, AD 3, AC 3, CB 5, & DB 5, prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam, per quintum Lemma, productum AD 3 in DB 5 factum ex duabus extremis, erit minus producto AC 3 in CB 5 ex medijs. Similiter ostendes, aliud quodcumque productum simile minus esse producto AC 3 in CB 5, quia punctus D ad libitum sumitur. Ergo AC 3 in CB 5 productum est maximum omnium. Quod &c.

Hactenus de recta linea AB inæqualiter secta, quum est segmentum maius ad minus, vti numerus ad numerum. Restaret altera pars Theorematis, quum est quemadmodum maius segmentum ad minus, sic numerus ad vnitatem. Hoc tamen constructione ac ratione tàm similibus modò factis concluditur, vt id sibi quisque inuenire, explicare ac dilatare facillime possit. Lectoribus autem scribimus à Geometria & ab Algebra instructioribus, quos huiuscemodi rerum intellectu facilium explicatione frustra defatigaremus; Quare pergimus ad reliqua vsum præstantissimum habentia ad inueniendas plurium linearum tangentes, figurarum centra grauitatis & quadraturas, & ad alia, item multa, quæ iusto seruamus Operi; vbi dabimus nouam solidorum Conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas, vti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas, infinitas ellipses, &, analogiam seruando, circulos etiam infinitos. Vnde Lectoribus manifestè apparebit, de Conicis me plus multò adinuenisse, quàm cæteros, eosque ingeniosissimos Viros, qui communem tantum hyperbolen, parabolen, ellipsin, & circulum [figuras Conici in nostra noua serie prædicta, secundi gradus] agnouerunt: alias tertij & quarti & cæterorum non item; nisi quod de parabolis infinitis per puncta in plano descriptis pauca, licet cognitione dignissima, tradidere nonnulli, quos inter, duo præcellentes ingenio viri, Fermatius. ac Torricellius, præceptor meus, inuentorum præstantia & numero commendabiles, ac Veteribus proximi; qui nouũ insuper excogitarunt hyperbolarum infinitarum genus. Neque prætereundum puto, quãplures Apollonij propositiones, atque demõstrationes aptari sectionibus nostris & per omnia congruere, affectasque multipliciter æquationes harum sectionum ope resolui facillimè, & determinari posse. Nunc reuertor ad rem.

THEOREMA III.

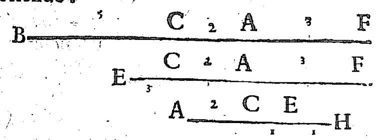
Data recta linea, & duobus terminis, secundum quos fiat in linea data productum: hoc erit

omnium

maximum omnium similium productorum, quæ fieri possunt ex binis eiusdem rectæ segmentis, velut ex radicibus.

Propositionem seco in partes duas. Primum dico, productum, quale descripsimus, esse omnium similium maximum, quum dantur termini æquales; quod in primo Theoremate demonstrauimus.

Deinde si dantur termini inæquales, sic rem ostendo.



Esto AB, recta data, & termini dati 5 & 2. Secetur recta in puncto C, sitque BC ad CA, vt 5 ad 2. Dico productum BC 5 in CA 2 factum in linea data secundum terminos datos esse maximum. Producatur BA in F, vt AF sit differentia segmentorum, & diuidendo primam porportionalitatem, nempè BC ad CA, vt 5 ad 2 [sicut in tertio Lemmate præscribitur] pergamus vsque dum incidamus in porportionem æqualitatis. In nostra hypothesi, primum erit, diuidendo 3, ad 2, vt FA differentia segmentorum ad AC minus segmentum; quam secundam porportionalitatem exhibet secunda figura, in qua fiat CE differentia segmentorum CA, FA; per consequens erit, diuidendo 1, ad 2, vt CE ad AC; quamquidem proportionalitatem seorsim exhibet tertia figura. Fiat EH differentia segmentorum CE, & AC, diuidendo erit 1 ad 1, vt EH ad EC; quæ est demum proportio æqualitatis; semper autem minus segmentum producimus vt æquemus maiori, & segmentorum differentiam constituamus.

At retrorsum vicissim, incipiendo à recta EA tertiæ figuræ, cuius maius segm. AC est 2, minus segm. CE est 1, & illorum differentia HE itidem 1. Quoniam productum HE 1 in CE 1 est maximum in linea CH, per primum Theorema nostrum, erit proinde, per secundum Theorema, EC 1 in CA 2 maximum in recta EA.

Deinde in recta FC secundæ figuræ, maius seg. AF est 3, minus AC est 2, & segmentorum differentia EC est 1; porrò cum EC 1 in CA 2 sit maximnm, erit per secundum Theorema, etiam maximum in recta FC productum AF 3 in AC 2.

Postremò in linea AB primæ figuræ, productum AF 3 in AC 2 est maximum, vt modò ostendimus, ergo per secundum Theorema est etiam maximum AC 2 in BC 5. Quod demonstrandum erat.

Si loco duorũ numerorũ detur numerus, & vnitas, fit similis cõstructio, & demonstratio.

SCHOLION.

Id quod in secundo Theoremate supponebamus; data recta linea, & datis, numeris 3, & 2, maximum fore productum in ea linea factum secundum numeros illos datos; nunc demonstrauimus in Theoremate hoc. Erat porrò illius Theorematis propositio conditionalis, ex posita illa hypothesi, non absoluta, vt patebit consideranti.

COROLLARIVM.

Si productum genitum ex dignitate ducta in dignitatem quamcumq; maximũ fuerit, illarum dignitatum radices & exponentes erunt Geometricè proportionales. Quippe in Theoremate ostendimus, productum in linea factum secundum terminos datos esse omnium maximũ; at productum eiusmodi, ex 5, definitione nostra, gignitur ex duabus dignitatibus, quarum exponentes rationem eam habet, quam dignitatum earundẽ radices.

PROBLEMA I.

Datam lineam rectam ita secare, vt productum ex dignitatibus segmentorum sit omnium similium maximum.

Sumantur exponentes duarũ illarũ dignitatum, rectaq; diuidatur in ratione horũ exponentium, & factum erit quod imperatur; quia productũ erit in linea data factũ secundum terminos positos, nimirũ secundũ exponẽtes; ac proinde erit maximũ per Theorema tertiũ.

PROBLEMA II.

Æquationem determinare, in qua potestas quæsitæ radicis negatur de homogeneo sub radice

data,

data, & dignitate sua parodica, vt B in A - A 2 || Z 2 : vel B in A 3 - A 4 || Z 4 &c.

Oritur huiusmodi æquatio ex dicta parodica dignitate potestatis negatæ ducta in B-A, differentiam datæ & quæsitæ radicis. Rem probo. Illa parodica dignitas affirmata, si primùm ducatur in A, radicem quæsitam negatam, gignet potestatem negatam vno gradu altiorem. quàm sit ea parodica dignitas [vt patet ex natura multiplicationis] deinde in B radicem datam affirmatam ducta, gignet homogeneum affirmatum, sub eadem dignitate parodica & radice data : Quæ duo producta sunt ipsa pars æquationis, de qua in Problemate. Pars altera est homogeneum comparationis.

Rursus, per Lemma quartum, ratio homogenei ad potestatem negatam est eadem, ac radicis datæ ad quæsitam; sed minor est potestas homogeneo, de quo ipsa negatur & demitur. Ergo etiam radix quæsita minor est data; In qua proinde radice data nos rectè sumimus segmentum æquale radici quæsitæ A, vt alterum segmentum sit B-A, differentia datæ ac quæsitæ radicis.

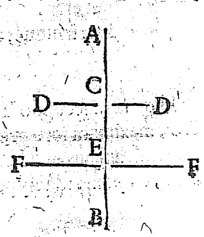
Quoniam igitur prima pars æquationis oritur ex B-A vno radicis datæ segmento, ducto in alterum seg. A, vel in huius potestatem, efficitur [per tertium Theorema] vt inde resultans productum sit maximum omnium similium, quotiescunque A, & B-A, segmenta rationem habent eam, quam exponentes suarum dignitatum. Sic in æquatione B in A 3 - A 4 || Z 4; si A, & B-A fuerint vt 3 ad 1, cubus segmenti A in B-A ductus gignet partem æquationis B in A 3 - A 4; quæ est productum in linea data B, omnium similium maximum; cuius proinde magnitudinem non potest vnquam excedere homogeneum comparationis; quod semper æquari necesse est illi alteri æquationis parti. Vnde canon pro determinanda Problematis æquatione conficitur.

Fiat in radice maximum productum secundum terminos, qui sunt exponentes eiusdem radicis & parodicæ dignitatis, sub quibus est homogeneum. Illius producti magnitudinem excedere non potest homogeneum comparationis.

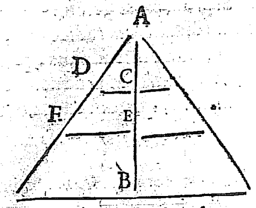
Idem procedit in alia æquatione orta ex multiplicatione ipsius, A, in B-A, vel in huius potestatem; semper enim est idem casus tertij Theorematis nostri, in quo productum factū in linea [seu data radice B], secundum terminos datos est maximum: termini verò sunt exponentes dignitatum segmenti A & alterius B-A.

Sed vno vel altero exemplo de Geometricis nostris Opusculis deprompto methodi facilitatem comprobemus.

E singulis punctis datæ rectæ AB ducatur rectæ CD, EF, &c. rectæ inter se parallelæ, cū data AB angulum quemcumq; efficientes. Sint autem harum parallelarum dignitates, & dignitates abscissarum AC, AE &c. Geometricè proportionales (id quod tripliciter contingere posse mox patebit) Transibit per extrema parallelarum puncta D, F, &c. perimeter figuræ, cuius diameter aut axis erit AB, vertex A, ordinatim verò ad diametrum applicatæ erunt ipsæ parallelæ.



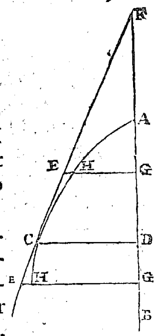
Nam parallelarū abscissarumq; dignitates si fuerint eiusdē gradus, e. g. FE 1 ad DC 1, vt AE 1 ad CA 1; vel cubi parallelarū vt cubi abscissarum, figura erit triangulum, cuius proprietas notissima est, non parallelas modò & abscissas esse Geometricè proportionales, sed parallelarū & abscissarū earumdem potestates omnes homogeneas; quarum ratio æquè multiplex est rationis linearū seu radicum; ita vt cubi, & quadrato quadrata, &c. abscissarū sint vt cubi, & quadrato quadrata &c. parallelarum; & illorum quoque radices Geometricè proportionales.



Sin autem diuersorum graduum fuerint dignitates parallelarum & abscissarū, linea descripta erit curua, habens suum axem, & ad illum ordinatim applicatas, quarum dignitas est gradu superior dignitate abscissarum : at contra dignitas applicatarū ordinatim ad rectā [quæ curuam in vertice contingit] sumptam pro axe, gradu inferior est dignitate abscissarum tangentis. De quo alibi latiùs dicam.

Esto

Esto igitur ACDB, vna ex præfatis figuris, eiusque axis AB, & vertex A, in qua quidem gradus dignitatis parallelarum sit altior gradu dignitatis abscissarum; quæratur autem linea recta contingens figuram in puncto dato C. Ducatur ex hoc puncto linea ad axem ordinatim applicata, vt CD, & ponantur exponentes dignitatum, 3, & 2. Erunt consequenter in figura parallelarum cubi vt quadrata abscissarum. Fiat abscissa A D, inter verticem & ordinatim applicatam, ad A F, axem productum, vt minor numerus 2 ad, 1, differentiam exponentium, ductaque F C; Dico hanc esse tangentem quæsitam.

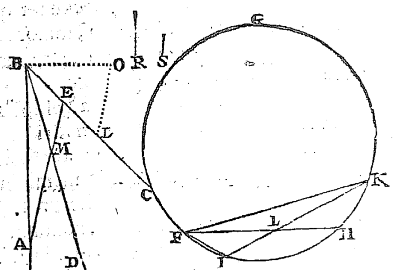


Productum enim FA 1 in AD 2 in linea D F, factum secundum terminos positos 1 & 2, est maximum, per Theorema tertium; semperque homogeneum dignitati parallelarum; (cum parallelarum dignitatē exponat maior datorum numerorum, maximum verò productum illud oriatur ex dignitatibus quas exponunt minor numerus & differentia numerorū, quæ duo simul efficiunt numerum maiorem). Ergo si accipiamus alium punctum G in axe supra D, aut infra, & ducamus ordinatim applicatam GH, quæ secet in E rectam FC (vbi opus fuerit productam); productum FA 1 in AG 2 non erit maximum in linea FG, quale est FA 1 in AD 2 in recta FD; propterea quod maior est vel minor ratio ipsius FA ad AG, quàm ad AD, & consequenter FG, FD non sunt porportionaliter diuisæ. Ergo maiorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FD 3 sibi homogeneum, quàm FA 1 in AG 2 ad FG 3, & permutando, maiorem rationem habet FA 1 in AD 2 ad FA 1 in AG 2, vel ex Lemmate quarto AD 2 ad AG 2) quàm FD 3 ad FG 3. Sed AD 2 ad AG 2 ponitur in figura; vt CD 3 ad HG 3 : FD 3 ad FG 3, ob similitudinem triangulorum, vt CD 3 ad EG 3. Ergo maiorem rationem habet CD 3 ad HG 3, quàm CD 3 ad EG 3; & consequenter CD maiorem rationem habet ad HG, quàm ad EG, ac proinde HG recta est minor quàm EG, & punctus E cadit extra datam curuam AHCH. Eodem pacto de singulis punctis ductæ lineæ FC demonstratur illos cadere semper extra curuā. Ergo FC est illius tāgens. Quod &c.

Hæ sunt parabolæ, vt vocant, infinitæ, quarum contingentes lineæ, quo modo ad datū punctum duci possint, ostendimus. Nunc eandem methodum in hyperbolis quoque libet experiri. Præmittimus autem hoc necessarium Lemma.

Lemma sextum.

Dato angulo A B C, vtcumque secto per rectam B D, & puncto E in alterutro laterum comprehendentium angulum datum; ex eo puncto ducere lineam rectam quæ angulum A B C subtendat & à recta B D, secetur in data ratione R ad S.



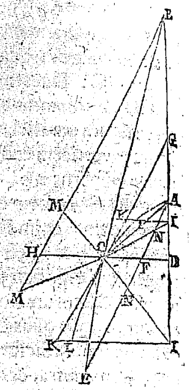
Fiat H G F segmentum circuli capiens angulum æqualem dato, & compleatur circulus; deinde vt R ad S, ita fiat F L ad L H; vt angulus A B D ad E B D, sic arcus F I ad I H; ductaque I L producatur vsque dum pertingat ad K in circumferentia circuli, & connectantur puncta F, K, H. Ad datum punctum E fiat angulus B E A æqualis K H L, & E A secet BD in M & B A in puncto A. Dico rectam E A esse quæsitam, quæ à B D in M diuiditur in ratione data.

Siquidem anguli H & E : k & B sunt æquales, & hi secti proportionaliter [per trigesimam tertiam sexti Elementorum] à k L I, & B D. Ergo triangula FHK, A B E sunt æquiangula, & AE ad EB, vt HF ad Hk. Rursus æquiangula fecimus triangula MBE, LkH, & consequenter EB est ad EM, vt Hk ad HL, & ex æqualitate ordinata AE ad EM, vt HF ad HL, & diuidendo FL ad LH [seu R ad S] vt AM ad ME. Quod &c.

Quod si punctus datus sit extra, vt in O, ducemus BO rectam [punctus autē O sic detur oportet, vt OB recta cum AB angulum faciat, nec sit ad lineam posita] & faciemus angulū bOL æqualem differentiæ angulorum EBO, & H, & OL producta satisfaciet Problemati.

Sit

Sit hyperbole A C L, cuius diameter AB, vertex A, & dignitates ordinatim applicatarum habentes eam proportionem quam producta illis dignitatibus homogenea, orta ex dignitate abscissæ ducta in dignitatem, abscissæ & diametri, ex quibus vna recta conflata intelligatur. Exempli gratia, quadrato cubi ordinatarum, hoc est LI 5 ad CD 5, sint, vt producta B I 3 in A I 2 ad BD 3 in AD 2, genita ex quadratis abscissarum A I, AD, & cubis rectarum BI, BD, quippe quas efficiunt eædem abscissæ & diameter.



Detur punctus C, ad quem ducenda sit tangens, & ordinatim applicetur CD. Porrò ducatur BC, producta ad partes C, quoad oportuerit, & ex Lemmate præcedenti AE [secans CD in F, & in F item secta pro ratione 2 ad 3, qui numeri exponunt dignitates gignentes producta BI 3 in A I 2, & BD 3 in AD 2, subtendens angulum ECA], & tandem GC, parallela rectæ AE, occurrens ipsi AB in G. Dico tangentem quæsitam esse CG.

Sumatur in CG alius punctus K supra & infra C, &, ordinatim applicatis K I secantibus hyperbolen in L, ab I puncto ducatur IC incidens in rectam HB in puncto M, & secans AE in N; quæ HB ipsi AE parallela occurrit DC productæ in H.

Quoniam verò AE secatur in F in ratione 2 ad 3, FA 2 in FE 3, per tertium Theorema, est productum maximum, & ratio FE 3 ad NE 3, seu HB 3 ad M B 3 [propter similitudinem triangulorum HCB, ECF: MBC, CEN] maior est ratione NA 2 ad AF 2. Ergo per Lemma quintum maius est HB 3 in AF 2 ipso MB 3 in NA 2; quæ duo producta si comparentur cum CG 5, primum habebit maiorem rationem ad CG 5, quàm secundum. Sed ratio primi, quod est HB 3 in AF 2, ad CG 5 eadem est ac ratio BD 3 in AD 2 ad GD 5 [cum HB ad CG sit vt BD ad GD, ob similitudinem triangulorum HBD, CGD; eandemque proportionem habeant earum linearum cubi: tùm C G 2 ad A F 2, vt G D 2 ad A D 2]: ratio secundi, seu M B 3 in N A 2, ad C G 5 est eadem ac ratio B I 3 in A I 2 ad I G 5 [quia similia sunt triangula M B I, C G I; & M B, C G, B I, I G, rectæ earumque cubi proportionales: rursus vt G I 2 ad I A 2, sic C G 2 ad A N 2]. Ergo maiorem rationem habet B D 3 in A D 2 ad G D 5, quàm B I 3 in I A 2 ad G I 5, & permutando B D 3 in A D 2 ad B I 3 in A I 2 [seu ex natura hyperboles C D 5 ad L I 5] maiorem rationem habet, quàm D G 5 ad G I 5, seu [ob similitudinem triangulorum K G I, C G D] C D 5 ad I K 5, & per decimam quinti Elementum dignitas L I 5, minor est, quàm K I 5, & sua radix, L I recta, minor recta K I; quare punctus K est extra curuam. Sic de cæteris punctis ostendetur cadere extra curuam, atque adeò C G, hyperbolen tangere in solo C puncto. Quod &c.

Hæc porrò demonstratio etiam ad ellipses, & circulos accommodari potest.

Iàm verò quàm latè pateat vsus nostri Theorematis tertij, ex propositis exemplis licet intelligere; nec ita multum dissimili aut difficiliori via centra grauitatis, & quadraturas, quorum problematum paulò ante meminimus, inuenimus. Interim, si quis Apollonij constructionem atque demonstrationem trigesimæ quartæ propositionis primi Conicorum libri cum nostris comparabit, nonnihil fortasse proficiet in Arte dilatandi propositiones & demonstrationes. Nam id quod ille de quadratica tantum hyperbole, ellipsi, & circulo statuit, nos ad omnes porrigimus hyperbolas, ellipses, circulosque infinitos. Quam viam placuit indicare, & supradicto exemplo confirmare.

Franci-

Francisco Mariæ Naldino S. Stephani Equiti, atque Discipulo suo eruditissimo Carolus Renaldinius F.

Paucis ab hinc annis, cum apud te Ruri quam humanissimè essem hospitio susceptus Theorema quoddam adinueni, magni sanè momenti, & à nemine, quod sciam animaduersum. Illud porrò tunc Arithmeticè primò quidem exhibui, mox animum ad illud idem Geometricè tractandi appuli. Vtroque modo tibi transmittendum operæ pretium duxi, apud te enim ortum aliquo modo tuum esse non immerito dixerim; eoque libentius id à me factum existimes, velim, quod te quotidie maxis rerum nouarum in Mathematicis studijs ardere desiderio satis intelligo; nulla tamen animum admiratione subeunte, cum ingenuitas indolis, qua te natura donauit, id prorsus exposcat.

Quod attinet ad obseruationem Lunaris Eclipseos celebratæ anno labente 1670, mense Septembris D. 28. Cælum ferè semper nubibus obuolutum cum fuerit initium, & finem occultauit, quatenus tamen cælum oculis vsurpare licuit, stellasque fixas intueri, vt earum altitudinibus deprehensis, temporis momenta calculo assequeremur, breui vt spero inter nos communicabimus. Cæterum in huiusmodi obseruationibus vsi sumus Tubo cum graticula, longitudinis quatuor ferè brachiorum; Quadrans erat iustæ magnitudinis, cuius costa foret duorum brachiorum, aderat doctissimus Geminianus Montanarius, in obseruando suam adhibens industriam, qui huc ob negotia quædam literaria se contulit. Tu interim de tuo statu; maximeque de conatibus egregijs ad excolendam virtutem, si quid mihi significaueris; argumentum erit amoris in me tui, quo vehementer delector; D. Dom. Andream fratrem tuum saluere iubeas velim. Tu interim Vale. scribebam Patauij: Anno à Virginis partu M. DCLXX.

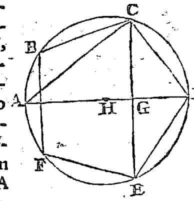
THEOREMA.

Si sit circulus, cuius diameter A D, in quo pentagoni B C D E F; latus D C; ductaque sit A C; Dico ipsam A C; longitudine esse hexagoni, & decagoni latus.

In eo videtur Theorema mirandum, quòd C D, pentagoni latus, vt Euclid. ostendit lib. XIII. Prop. 10. potest hexagoni, atque decagoni latus; at verò A C, eadem latera longitudine. Si numeris illud tractare libet, ex hypothesi, quod diameter sit 12. latus pentagoni erit ℞ (90 -- ℞ 1620.) at si ex 144 quadrato diametri auferamus 90 -- ℞ 1620, nempe quadratum ipsius ℞ (90 -- ℞ 1620) remanebit 54 ✢ ℞ 1620, pro quadrato ipsius A C, ex 47. primi Elementorum; vnde pro ipsa A C, remanebit ℞ (54 ✢ ℞ 1620) hoc est 3 ✢ ℞ 45. binomium enim illud 54 ✢ ℞ 1620, quadratum est, cuius latus est 3 ✢ ℞ 45. At verò hexagoni latus est 6; quo addito ad ℞ 45 -- 3. Decagoni latus (est enim ℞ 45 -- 3, latus decagoni in circulo, cuius diameter est 12) fit 3 ✢ ℞ 45.

Geometricè tamen hæc eadem hunc in modum Analyticè præstabimus.

RESOLVTIO.



Quoniam A C, est longitudine latus hexagoni, vna cum latere decagoni, ergo quadratum A C, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo, sub ijsdem lateribus; sed quadratum DC, æquale est a quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni. Æqualibus vtrinque additis, quadratum A C, plus quadrato C D, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, vna cum quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, ergo quad. AC, plus quadrato CD, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, sed quadratum A D, æquale est, quadratis A C, C D, ergo quadr. A D, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus; hoc est quadruplum quad. lateris hexagoni, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdē lateribus, ergo duplū quadr. lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdem lateribus ergo quadratum lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdem lateribus. Quod ita se habet ex lib. XIII. prop. 11. Elementorum.

a prop. 10 lib. XIII. Elemēt.

COMPOSITIO.

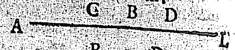
Quoniam quad. lateris hexagoni, æquale est quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdem lateribus, ergo duplum quadratum lateris hexagoni, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus rectangulo sub ijsdē lateribus; ergo quadruplū quad. lateris hexagoni, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus; hoc est quadratum A D, æquabitur duplo quadrato lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo

duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, Sed quadratum A D, æquale est quadratis A C, C D, ergo quadrata A C, C D, æqualia erunt quadrato duplo lateris hexagoni, plus duplo quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus. Sed quadratum C D, æquale est quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni; ergo æqualibus vtrunque sublatis, quadratum A C, æquabitur quadrato lateris hexagoni, plus quadrato lateris decagoni, plus duplo rectangulo sub ijsdem lateribus, ergo A C, erit longitudine latus hexagoni, plus latere decagoni.

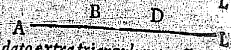
Ad Problema illud quod attinet de diuisione trianguli per rectam à puncto extra, vel intra triangulum, multa mihi dicenda occurunt, de quibus aliquando coram. Interim adnotabo, ad illud resoluendum, cum punctum primo fuerit extra, in neutro tamen è lateribus producto, facere hæc; nempe.

A dato angulo per elatum in latere punctum, triangulum abscindere æquale triangulo dato. Item.

Data sit e. g. recta A L, infinita secta quidem in C, & B. Oportet iterum illam diuidere in D, vt A B, C D, A D, sint proportioaales. Item



Data sit recta A L, diuisa quidem in B, oporteat iterum illam diuidere in D, vt A B, B D, A D, sint proportionales. Tandem



Ex dato angulo triangulum abscindere æquale spatio per lineam ductam ex dato extra triangulum puncto.

Horum præsidio Problemati fiet satis; sic etiam suo modo cum punctum fuerit intra, &c. de quibus coram vt dixi. Vale.

FINIS.

Noi Reformatori dello Studio di Padoua.

Hauendo veduto per fede del Padre Vicario Generale del Sant' Officio di Padoa, nel Libro intitolato *Caroli Renaldini Tractatus de Algebra Speciosa*, &c. non esserui cosa alcuna contro la Santa fede Cattolica, e parimente per attestato del Segretario nostro, niente contro Prencipi, e buoni costumi, concediamo licenza agl' Heredi di Paolo Frambotto di poterlo stampare osseruando gli Ordini &c.

Dat. à 21. Ottobre 1670.

{ Nicolò Sagredo Cau. Pr. Ref.

{ Battista Nani Cau. Pr. Ref.

Angelo Nicolosi Segr.

N-

INDEX

Eorum, quæ in hoc Tractatu continentur.

M circa

FINIS.